This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

B 482858

THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

Digitized by Google

Physics Lib.
QC
254
.B77

Digitized by Google

Digitized by Google

THÉORIE ANALYTIQUE

DE

LA CHALEUR.

Digitized by Google

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
29154 Quai des Grands-Augustins, 55.

Digitized by Google

4587 1012

Alexander Ziwet

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

THÉORIE ANALYTIQUE
DE
LA CHALEUR

MISE EN HARMONIE

AVEC LA THERMODYNAMIQUE
ET AVEC LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA LUMIÈRE,

PAR J. BOUSSINESQ, i.e. Valentin Joseph
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

TOME I
PROBLÈMES GÉNÉRAUX.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.
1901

(Tous droits réservés.)

Digitized by Google

Alex. Ziwet
2 vols.
gts.
8-29-1922

Digitized by Google

INTRODUCTION.

I. Lorsque Biot et surtout Fourier créèrent, il y a près de cent ans, la *Théorie analytique de la chaleur,* en généralisant la loi élémentaire de refroidissement dont Newton avait eu l'idée, la Mécanique moléculaire était trop peu avancée pour qu'ils pussent même songer à y rattacher la nouvelle science, de la propagation de la chaleur dans les corps solides, qu'ils parvenaient ainsi à formuler en langage mathématique. Il aurait tout au moins fallu, pour cela, non seulement que les équations générales du mouvement vibratoire des milieux élastiques fussent trouvées, mais encore que l'on connût plus nettement la nature ondulatoire de la lumière et l'analogie complète, avec les radiations lumineuses, de la chaleur rayonnante à laquelle est dû si souvent l'échauffement effectif des corps. Aussi Fourier et, après lui, Laplace, Poisson, Duhamel, Lamé lui-même, assimilant le *calorique* à un fluide expansif et la *température* de chaque particule pondérable à la densité ou, plutôt, à la tension de ce fluide dans la particule, se contentèrent-ils, pour obtenir la variation élémentaire de la chaleur et, par suite, de la température, dans chaque petite région d'un corps athermane, d'admettre entre *molécules* voisines des échanges de calorique proportionnels à la différence de leurs températures respectives. Et c'est sur cette hypothèse du *rayonnement particulaire* que l'enseignement de la théorie en question est resté édifié jusqu'ici.

On sait cependant, depuis un demi-siècle, que la chaleur n'est pas une matière ou un fluide; car elle s'évalue en kilogrammètres. Elle est donc, comme un grand nombre de philosophes et de phy-

406158

Digitized by Google

siciens s'en étaient doutés depuis longtemps, de la nature d'un travail ou d'une demi-force vive, bref, d'une énergie; et sa lente propagation dans les corps, malgré l'étonnant contraste qu'elle offre avec les rapides et presque intégrales [1] transmissions de l'énergie, soit sonore, soit surtout lumineuse ou calorifique rayonnante, doit être comprise, comme celles-ci, au nombre des phénomènes vibratoires, ou résulter, au fond, des lois du mouvement des systèmes matériels.

C'est pourquoi, ayant eu, en qualité de professeur de Physique mathématique à la Sorbonne, à enseigner cette belle et capitale branche de la Philosophie naturelle, la plus simple, peut-être, parmi celles qui constituent des applications étendues de l'Analyse infinitésimale, la plus propre aussi à initier les jeunes géomètres à la représentation et au calcul des phénomènes, j'ai cru devoir, malgré la nouveauté et la difficulté du sujet, tenter d'en établir les principes dans l'hypothèse thermodynamique. J'ai donc fait de cette théorie une sorte de contre-partie de la théorie même des ondes lumineuses, en considérant la chaleur des corps comme de la chaleur rayonnante *condensée* et, par conséquent, comme un mouvement vibratoire, dont les équations sont, il est vrai, à raison même de cette condensation, autrement particularisées que celles des mouvements *par ondes,* mais ne rentrent pas moins qu'elles dans les formules générales de la Mécanique moléculaire.

II. Je commence par exposer, de la manière la plus élémentaire possible, les lois approchées des ondes à courte période, c'est-à-dire de la lumière et de la chaleur rayonnante, d'abord dans l'éther libre, puis dans l'éther des corps transparents ou diathermanes,

---

[1] C'est essentiellement l'intégralité de transmission, en vertu de laquelle l'énergie d'une onde se déplace suivant un sens déterminé, dans l'étendue à une ou à trois dimensions, *sans laisser aucune fraction appréciable d'elle-même à l'arrière du gros de l'onde,* qui distingue le son, la lumière et la chaleur rayonnante, de la chaleur condensée des corps. Pour celle-ci, la propagation est, avant tout, un nivellement, c'est-à-dire un déplacement *partiel* et non intégral, effaçant les inégalités de distribution de la chaleur aux divers points, bien plus qu'elle n'en change le siège.

Digitized by Google

en attribuant alors l'excédent de densité (fictif) de l'éther, par lequel Fresnel y explique le ralentissement des ondes, à une résistance des molécules pondérables comme celle que du Buat a constatée chez les milieux fluides où oscille un pendule court, et qu'il a traduite par un accroissement relatif constant de son inertie, égal à la part de mouvement prise et restituée tour à tour, par le milieu, au pendule. Je m'appuie donc sur la théorie des ondes lumineuses, assez répandue maintenant, que j'avais conçue vers la fin de juillet 1865, et à laquelle la simplicité, le naturel de ses hypothèses, non moins que la fécondité de ses explications, ont valu le suffrage de géomètres-physiciens éminents.

Cette théorie permet de se représenter nettement les ondes de la chaleur *disséminée* ou rayonnante. Or, pour passer, de là, à la notion de la chaleur ordinaire ou condensée, il suffit d'admettre que ces ondes, en pénétrant dans un corps, et en y ébranlant dans une imperceptible proportion les molécules, mettent en jeu, entre celles-ci, des actions élastiques propres à entretenir les déplacements périodiques ainsi ébauchés. Alors la continuation de l'arrivée des ondes à la surface du corps accroît ces déplacements moléculaires et accumule en eux, peu à peu, l'énergie vibratoire, jusqu'à leur faire dépasser toute limite d'amplitude compatible avec la conservation de la forme linéaire des équations différentielles du mouvement.

D'une part, en effet, les vibrations dont il s'agit sont d'une brièveté de période comme infinie par rapport aux vibrations sonores, les seules que des actions à aussi grand rayon d'activité que les actions moléculaires soient aptes à propager par *voie d'ondes*, c'est-à-dire par grandes masses, par multitudes de points vibrant d'un mouvement commun. Or cette brièveté excessive, en rendant la longueur d'ondulation seulement comparable aux distances intermoléculaires, est cause que les molécules oscillent, pour ainsi dire, isolément, ou avec écarts de phase notables de l'une à l'autre, de manière à n'ébranler qu'à la longue, par efforts discordants, leurs voisines supposées soustraites ou moins exposées qu'elles à l'action directe des ondes. D'autre part, comparativement à la ténuité

Digitized by Google

extrême, à l'inimaginable raréfaction de l'éther, l'énorme compacité des molécules leur permet d'emmagasiner sous un petit volume toute l'énergie disséminée primitivement, à l'état ondulatoire, dans d'immenses espaces. Et c'est ainsi que se constitue la chaleur des corps, par *stagnation* presque absolue et *condensation* prodigieuse de la chaleur rayonnante.

Cela posé, le mouvement calorifique, ayant cessé d'avoir ses équations linéaires, n'est plus qu'une *agitation* irrégulière, indécomposable en mouvements simples ou en systèmes d'oscillations isochrones. Mais, par contre, et à cause même de cette non-linéarité, les situations *moyennes* des molécules y diffèrent de leurs situations primitives d'équilibre ou de repos. Or, des changements ainsi survenus dans les distances des situations moyennes, il résulte une *dilatation* calorifique du corps; et cette dilatation, observable surtout dans certaines substances, spécialement dans les gaz, dont on composera les *thermomètres,* permet justement d'apprécier l'*intensité* de l'agitation. Le principe expérimental de l'*équilibre des températures* vient ici en aide au physicien-géomètre, arrêté par la complication des équations du mouvement, et lui permet de définir, pour tous les corps, des *niveaux thermiques,* mesurés par le volume correspondant, dit *température,* du thermomètre à gaz. Or ces niveaux règlent, d'après leur élévation relative dans deux corps donnés que l'on met en contact, le travail de leurs actions mutuelles corrélatif au mouvement calorifique, c'est-à-dire le *flux de chaleur* que gagne, à travers leur surface, le corps à température plus basse, égal à celui que perd le corps à température plus haute.

III. Les échanges de chaleur ou flux, pour des dérivées ou *pentes* données de la température entre parties d'un corps voisines, sont en rapport de grandeur avec la *conductibilité intérieure* du corps suivant les divers sens, et se ramènent toujours, dans chaque particule matérielle, à un *courant* unique de chaleur, traversant tous les éléments plans de la particule. Suivant la contexture de celle-ci, un même mode de distribution des températures

Digitized by Google

dans la particule donne lieu à des courants différents, tant pour la direction que pour la grandeur, et dont la construction dépend de deux ellipsoïdes, dits, l'un, *principal,* l'autre, *des conductibilités.* Ces ellipsoïdes caractérisent donc les propriétés conductrices de la contexture proposée. Dans les corps à contexture symétrique, le second ellipsoïde se confond avec le premier. Enfin, celui-ci se réduit à une sphère quand la contexture devient isotrope. Mais les constructions gardent une grande simplicité même pour la contexture la plus générale; et, sous ce rapport, la théorie de la conductibilité, comparée, par exemple, à celle des pressions élastiques, jouit d'un véritable privilège, dû à ce que la théorie analytique de la chaleur est, au fond, la branche la plus simple de la Physique mathématique, une fois ses principes établis ou admis.

On verra, dans ce Cours, l'équation indéfinie des températures, identique à celle de Fourier dans la double hypothèse d'homogénéité et d'isotropie, n'être qu'une forme de l'équation des forces vives, appliquée au mouvement calorifique des particules; et l'on y verra aussi le problème général de l'échauffement d'un corps se ramener aux deux problèmes plus simples du refroidissement et des températures stationnaires, explicitement abordés par Fourier dans son Traité. Cette réduction avait, du reste, été employée, et déjà par Fourier même : je n'ai eu qu'à la généraliser.

IV. La table suivante des matières indiquera, du moins pour le premier Volume, le détail des questions particulières que j'ai traitées. Je n'y insisterai pas ici, tout en observant que j'ai tâché de n'omettre aucune de celles qui ont un véritable intérêt soit pour le physicien, soit au point de vue philosophique.

Je développe spécialement, avec beaucoup plus de généralité qu'on ne l'avait fait jusqu'à présent dans les Cours, la théorie du refroidissement simple, en insistant sur les considérations de Fourier relatives à l'état pénultième, ou à la rapide disparition des irrégularités de l'état initial. Je donne ensuite les applications que Fourier, Laplace, Poisson ont faites de cette théorie à l'armille, au cube, à la sphère, au cylindre; j'ai tâché, dans les deux derniers

Digitized by Google

cas, de conserver aux formules, sans y exclure les coordonnées polaires, toute la symétrie que procurent les coordonnées rectangulaires rectilignes, de manière à donner au lecteur, grâce à la simplicité relative ainsi obtenue, une idée parfaitement nette des solutions, sans lui imposer une dépense notable de temps et de fatigue.

Comme exemple d'un échauffement périodique, j'étudie, après Fourier et Poisson, la propagation, dans le sol, des inégalités annuelle et diurne de la température terrestre.

V. L'échauffement et le refroidissement d'un solide peuvent se faire soit par le contact d'un autre solide, ou surtout d'un liquide, ayant leurs densités comparables à la sienne et des températures données, soit par rayonnement ou convection, à travers le vide (c'est-à-dire l'éther libre) ou, plus souvent, à travers une atmosphère de faible densité. C'est, dans le premier cas, une *pente* finie et, dans le second, une *chute* finie, de la température, à travers ou sur la couche superficielle du corps, qui règle le flux de chaleur entrant ou sortant; et il suit de là que l'on connaît, à chaque instant, sous la surface, la température même du corps, dans l'échauffement ou le refroidissement par contact, mais seulement une certaine fonction linéaire de la température et de ses trois dérivées partielles relatives aux coordonnées, dans l'échauffement ou le refroidissement par rayonnement. Aussi le second cas est-il beaucoup plus compliqué que le premier.

Or j'expose une méthode simple qui ramène, dans un certain nombre de problèmes, le second au premier, alors facilement résoluble; et, parmi ces problèmes, il s'en trouve trois des plus intéressants que l'on pût se poser, rendus ainsi très accessibles, savoir: la célèbre question, abordée par Fourier, du refroidissement de la croûte terrestre, la question connexe, rendue plus simple encore, de son échauffement, enfin le problème, traité par Poisson, de l'échauffement permanent d'une sphère, par le rayonnement de sources de chaleur extérieures ayant, au-dessus de chaque élément de la surface, une température donnée.

Digitized by Google

VI. Les six dernières Leçons sont consacrées à une question élémentaire et capitale, que les Cours publiés jusqu'ici, à ma connaissance du moins, avaient entièrement passée sous silence. C'est la propagation de la chaleur, à partir d'une source, dans un milieu homogène hétérotrope indéfini, à une, deux ou trois dimensions, c'est-à-dire dans une barre rectiligne, une plaque plane ou un corps massif, comme sont des aiguilles, lames et masses extraites d'un cristal.

La manière dont s'y forme l'équation des températures constitue une application intéressante de la théorie générale de la conductibilité et met en vue l'importance des deux ellipsoïdes. Celui des conductibilités est inévitable dans l'étude des barres et des plaques, pour définir les coefficients que contient l'équation, variables avec l'orientation qu'avaient la barre ou la plaque dans le corps d'où on les a extraites. Mais l'ellipsoïde principal y devient nécessaire, dès qu'on veut, en même temps qu'étudier la variation des températures le long de l'axe de la barre ou sur le feuillet moyen de la plaque, construire les petits plans isothermes existant dans la barre ou la petite génératrice des cylindres isothermes qui se produisent dans la plaque, plans et droite dont la direction ne dépend pas du mode d'échauffement de ces corps. Au contraire, quand il s'agit d'un corps massif, c'est l'ellipsoïde principal qui donne, tout à la fois, les coefficients de conductibilité figurant dans l'équation des températures et la forme des surfaces isothermes. Mais l'ellipsoïde des conductibilités y intervient dans la construction des courants de chaleur émanés de la source.

La circonstance de ces phénomènes la plus aisément observable est le fait des ellipses isothermes qui se dessinaient sur des plaques minces, autour du point chauffé comme centre, dans les expériences classiques du physicien de Senarmont et dans celles du minéralogiste Jannettaz, ellipses permettant, lorsqu'on remet idéalement en place, dans le cristal ou la roche étudiés, des plaques d'orientation diverse, avec centres coïncidents, de constituer par leur ensemble une famille d'ellipsoïdes concentriques et homothétiques. L'un d'eux est justement l'ellipsoïde même des conductibilités.

Digitized by Google

La chaleur émane en droite ligne de la source, soit dans les barres, soit dans les plaques ou les corps massifs de contexture symétrique. Mais il en est autrement dans les masses et plaques (supposé qu'il en existe effectivement) à contexture non symétrique, où les deux ellipsoïdes sont distincts. Alors ce n'est qu'en tourbillonnant, en décrivant certaines spirales, planes dans une plaque, enroulées sur une famille de cônes elliptiques, à axes communs, dans un corps massif, que la chaleur se répand en tous sens à partir de la source.

VII. Les Leçons que je publie m'auraient semblé incomplètes, si elles avaient paru sans un exposé un peu détaillé de la théorie des ondes lumineuses qui leur a servi de point de départ. La lumière et la chaleur, ou, ce qui revient presque au même, la chaleur disséminée dans l'éther et la chaleur condensée dans les corps, sont, en effet, les deux spécifications d'un même phénomène général. Un travail d'ensemble doit donc les comprendre l'une et l'autre. Et comme, dans les ondes lumineuses telles que les offre un corps transparent, la résistance de chaque molécule pondérable paraît avoir pour type celle qu'éprouve un pendule court à osciller dans l'air ou dans l'eau, et, par conséquent, celle qu'exercerait sur un fluide oscillant un solide immergé, j'ai cru devoir ajouter à ces Leçons deux grandes Notes finales, qui sont deux Mémoires étendus, consacrés, l'un, à la résistance d'un solide aux petits mouvements relatifs du fluide où il est plongé, l'autre, à la théorie mécanique de la lumière.

La première de ces Notes contient d'abord l'établissement des lois générales de la résistance en question, pour toute forme du corps immergé, dans l'hypothèse de la fluidité parfaite, avec le calcul des coefficients de résistance de l'ellipsoïde (ce qui comprend la sphère, le cylindre indéfini, le disque circulaire, etc.). Le résultat général consiste dans la double proportionnalité des résistances à la masse fluide que déplace statiquement le solide et aux accélérations relatives du fluide par rapport au solide, avec coefficients généralement inégaux suivant les divers sens, mais avec

Digitized by Google

existence de trois directions rectangulaires suivant lesquelles les composantes de la résistance correspondent respectivement à celles de l'accélération relative.

Ensuite j'introduis (après Stokes, mais pour des mouvements beaucoup plus variés que les oscillations pendulaires, auxquelles il s'était borné) les frottements intérieurs du fluide, tels que les a formulés Navier et qu'ils se comportent dans les mouvements bien continus. Je reconnais ainsi, sur la sphère et le cylindre circulaire indéfini pris comme exemples abordables, la présence de résistances supplémentaires, dont l'une est simplement proportionnelle à la vitesse actuelle du fluide par rapport au solide, et dont les autres dépendent des changements antérieurs éprouvés par cette vitesse. Mais ces résistances fonctions des frottements s'effacent devant la précédente, quand les mouvements deviennent des oscillations très brèves.

Donc il doit bien subsister seulement, du moins à une première approximation, pour des vibrations à aussi courte période que le sont les mouvements calorifiques et lumineux, la résistance proportionnelle aux inerties relatives des volumes fluides par rapport au solide, découverte expérimentalement par du Buat sur les pendules courts oscillant dans l'eau.

VIII. Quant à la seconde et principale Note, elle contient les applications des principes exposés dans la IVe Leçon, sur les rapides vibrations simultanées de l'éther et de la matière pondérable, à presque tous les phénomènes lumineux offerts par les corps transparents, notamment à ceux qui semblent le plus propres à servir, en quelque sorte, de pierre de touche, d'*experimentum crucis*, pour juger une théorie mécanique de la lumière.

Citons, en particulier, la constitution d'un pinceau (latéralement limité) de lumière parallèle, dans un milieu soit isotrope, soit biréfringent; les lois de sa réflexion et de sa réfraction, avec calcul des intensités des lumières réfléchie et réfractée, à la surface de séparation de deux milieux homogènes soit transparents tous les deux, soit l'un transparent et l'autre opaque; les lois appro-

Digitized by Google

chées de la dispersion, tant des radiations calorifiques obscures (à périodes relativement longues) que des radiations colorées et ultra-violettes; l'entraînement partiel des ondes par les corps en mouvement et les phénomènes d'aberration qui s'y rattachent; la polarisation rotatoire et la double réfraction elliptique; la puissance réfractive et le pouvoir rotatoire des mélanges; la propagation curviligne d'un pinceau lumineux dans les milieux hétérogènes comme l'atmosphère, en accord avec le principe de Fermat sur le choix, par les ondes, des trajets de durée minimum; etc.

IX. A cette masse considérable de faits ainsi expliqués, joignons le rattachement, aux mêmes principes mécaniques, des phénomènes de conductibilité et d'un grand nombre d'effets de la chaleur dans les corps, même certaines explications, assez précises quoique sommaires, tant de la non-résistance presque absolue de l'éther à la translation des corps, que de son absence de poids généralement admise; et l'ensemble constituera une synthèse étendue, de phénomènes extrêmement divers d'aspect, ramenés à un petit nombre de principes simples, clairs, paraissant tous cohérents, et dont aucun enfin, j'ose le dire, n'est invraisemblable. Je me flatte même d'avoir rendu moins paradoxale l'inévitable hypothèse de la non-propagation des ondes longitudinales dans l'éther libre, qui demeure seulement *extraordinaire*, c'est-à-dire propre à l'éther, à raison de la constitution non moléculaire, mais atomique, de ce milieu, et de son extension presque indéfinie.

Il y a donc quelque lieu d'espérer que cette synthèse contient une ligne de jalons destinée à rester dans la science, sur une voie difficile où les données nous font défaut en bien des points, malgré la multitude des vérifications d'ensemble.

On n'y trouvera pas, en tout cas, je le pense, des hypothèses impliquant presque contradiction, dans le genre, par exemple, de celles qui ont eu longtemps cours sur le même sujet. Je veux parler des deux suppositions, entre lesquelles on se partageait, d'un éther prenant toutes les densités possibles sans changer d'élasticité, ou, inversement, d'un éther capable d'offrir, sous densité constante,

Digitized by Google

tous les degrés d'élasticité, comme si les actions élémentaires dont se compose une force élastique pouvaient avoir réellement leur somme indépendante de leur nombre. Assurément, de telles hypothèses, quand elles expriment un certain caractère apparent des phénomènes, sont précieuses au début d'une science, alors qu'il s'agit de donner un objet et une orientation aux recherches. Mais elles ne sauraient guère subsister; car l'esprit ne respecte, du moins dans ses constructions idéales, même destinées à lui représenter une réalité toujours complexe, que ce qui est harmonique, c'est-à-dire cohérent et simple.

X. Je n'avais pas à parler de la théorie électromagnétique de la lumière, appartenant à un tout autre ordre d'idées, savoir, aux profondes tentatives, bien indécises encore, de Maxwell et de ses éminents disciples, pour synthétiser, même avant de les rendre nettement intelligibles, ou représentables, les phénomènes d'électricité et de magnétisme. Si cette théorie parvient à se dégager de ses obscurités, de ses contradictions même, tout au moins apparentes, elle ramènera vraisemblablement à l'optique de Fresnel, dont elle a les formules, c'est-à-dire au mécanisme des ondes lumineuses, les *changements* alternatifs *d'état* des milieux diélectriques, plutôt qu'elle ne réduira l'optique à oublier les mouvements vibratoires pour s'en tenir à d'aussi mystérieux changements d'état.

Sans doute, toutefois, la théorie des ondes lumineuses s'en trouvera finalement élargie. Mais on n'éclaircit pas *obscurum per obscurius*. Et, jusqu'ici, la Science, considérée sinon toujours dans ses matériaux, qu'il faut d'abord recueillir de toutes parts, du moins dans son organisation, dans sa partie édifiée ou susceptible de l'être, a grandi en allant d'Aristote à Descartes et à Newton, des idées de *qualités* ou de *changements* d'état, qui ne se dessinent pas, à l'idée de *formes* ou de *mouvements* locaux, qui se dessinent ou se voient. Son progrès consiste à reculer peu à peu les limites du domaine qu'éclaire l'humble lumière, parfois bien vacillante, de notre raison et surtout de l'intuition géomé-

Digitized by Google

trique (sa principale ressource), aux dépens des infinies régions obscures qui enserrent de toutes parts ce domaine de la clarté, et non à étendre jusque sur lui l'immense brouillard qui, malgré de vagues lueurs le perçant çà et là, dérobe à notre vision distincte tout le reste ([1]).

M. Flamant, inspecteur général des Ponts et Chaussées, ancien professeur à l'École de ce Corps, et auteur de Traités sur la *Résistance des matériaux* et sur l'*Hydraulique,* estimés universellement, a bien voulu, en lisant la première épreuve de ces feuilles, m'indiquer plusieurs corrections et me suggérer d'utiles éclaircissements. Qu'il reçoive ici l'expression de ma gratitude et de celle de mes lecteurs.

Je n'ai pas à parler du soin apporté à l'impression ou aux qualités typographiques de l'Ouvrage : le nom de mon éditeur est, sous ce rapport, la meilleure des garanties.

([1]) Y compris les vérités de sentiment régulatrices de la vie humaine, rendues efficaces, malgré leur obscurité, par de bons instincts de la nature ou des impulsions intérieures, que renforce l'éducation morale, et par l'adhésion libre des volontés honnêtes.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME I.

Pages.

INTRODUCTION V

PREMIÈRE LEÇON. — *Objet de la théorie analytique de la chaleur; nécessité de l'édifier sur ce fait, que la chaleur est de l'énergie et non de la matière.*

1. Objet de la théorie analytique de la chaleur 1
2. Coup d'œil sur l'histoire de cette branche de la Physique mathématique : travaux antérieurs à Fourier 2
3. Œuvre de Fourier et de ses continuateurs 4
4. Simplicité relative de la théorie de la chaleur et son rôle dans l'initiation aux méthodes de la Physique mathématique 4
5. Hypothèse du rayonnement particulaire, dans les corps athermanes... 6
6. Nécessité d'élargir cette hypothèse et d'en discuter les éléments, à raison de la nature dynamique, et non matérielle, de la chaleur. 7
7. Rappel du principe de l'énergie, sur lequel reposera la théorie nouvelle 9

DEUXIÈME LEÇON. — *Application du principe de l'énergie à un solide qui s'échauffe ou se refroidit : définition dynamique des chaleurs sensible, potentielle, totale et des flux de chaleur.*

8. Notion de l'agitation calorifique 12
9. Rapides changements de sens qu'y éprouvent les vitesses soit dans le temps, soit dans l'espace 13
10. Décomposition de la demi-force vive d'une particule de matière en énergie actuelle du mouvement visible et en énergie actuelle calorifique 14
11. Chaleur sensible d'un corps 15
12. Décomposition de l'énergie potentielle en deux parties, dont la première est l'énergie de pesanteur 16
13. Énergie potentielle interne : on peut la rapporter à l'unité de volume. 17
14. Dédoublement de l'énergie potentielle interne en énergie purement élastique et en chaleur potentielle 21
15. Premier membre de l'équation des forces vives : chaleur totale 23

Digitized by Google

Pages.

16. Travail extérieur : il comprend d'abord le travail des pressions subies par la surface 23
17. Le travail extérieur comprend encore les flux de chaleur entrés dans le corps 26
18. Égalité absolue, avec signes contraires, des deux flux traversant en sens opposés un même élément plan 27

TROISIÈME LEÇON. — *De la chaleur, considérée d'abord à l'état de mouvement ondulatoire bien continu, dans l'éther des espaces interplanétaires.*

19. Vibrations lumineuses et calorifiques dans l'éther libre 29
20. Fluidité de l'éther pour les déformations, ou grandes, ou lentes, et sa rigidité, ou résistance aux déformations, pour celles qui sont assez faibles et assez multipliées 30
21. Excessive petitesse de la densité de l'éther 33
22. Extrême division ou ténuité de l'éther, comparativement à celle de la matière pondérable 35
23. Hypothèses plausibles sur la constitution, atomique et non moléculaire, de l'éther 37
24. De son mode d'action sur la matière pondérable et sur lui-même 40
Sur la non-propagation, par l'éther, des ondes à mouvements longitudinaux (Note) 41
25. Aperçu théorique sur la propagation des ondes dans l'éther libre : équations de leur mouvement 44
Équations générales des petits mouvements de l'éther libre (Note) 48
26. Propagation des ondes dans l'éther libre : vitesse des radiations lumineuses ou calorifiques 52

QUATRIÈME LEÇON. — *Propagation des ondulations calorifiques, à l'intérieur des corps diathermanes.*

27. Constitution de l'éther à l'intérieur des corps pondérables 54
28. Résistance d'un corps au mouvement d'un fluide ambiant 55
29. Résistance opposée par une molécule pondérable au mouvement vibratoire de l'éther ambiant 58
30. Équations du mouvement ondulatoire de l'éther d'un corps isotrope, dans l'hypothèse de la transparence ou diathermanéité de ce corps .. 59
31. Les radiations s'y transmettent comme dans un éther libre plus dense que celui du vide; première condition nécessaire pour la transparence ou la diathermanéité 64
32. Expression des petits déplacements imprimés à la matière pondérable par l'éther vibrant 64
33. Deuxième et principale condition nécessaire pour la transparence ou diathermanéité : les forces élastiques de la matière pondérable ne doivent pas accroître peu à peu les déplacements de ses molécules .. 70
34. Formes diverses de l'équation du mouvement; rapports des quantités de mouvement et des forces vives, dans l'éther et dans la matière pondérable vibrant ensemble lumineusement 72

Digitized by Google

CINQUIÈME LEÇON. — *De l'agitation calorifique, telle qu'elle naît, dans les corps athermanes, de l'accourcissement et du ralentissement presque infinis des ondes de l'éther.*

Pages.

35. Disparition, dans les corps athermanes, de la propagation uniforme des ondes 74
36. Les équations du mouvement n'y sont même plus linéaires..... 76
37. Ce que serait la chaleur des corps, si leurs molécules étaient assez nombreuses, et leurs actions élastiques exercées d'assez près, pour y assurer la continuité des ondes..... 77
38. La chaleur des corps est de la chaleur rayonnante, condensée dans un rapport presque infini..... 81
39. Transformation des ondes en une agitation irrégulière, se propageant sans uniformité et beaucoup plus lentement que le son..... 82

SIXIÈME LEÇON. — *Degré de l'agitation calorifique, évalué par les dilatations qu'elle produit. Notion de température.*

40. Du degré de l'agitation calorifique, considéré comme une variable propre à la définir..... 85
41. Dilatation produite par l'agitation calorifique et pouvant en marquer le degré 87
41 *bis*. Possibilité de corps lumineux sans chaleur et de radiations irréfrangibles 90
42. Principe de l'équilibre de température et possibilité d'une échelle thermométrique commune à tous les corps 92
43. Notion de température : températures absolues; températures centigrades..... 94
44. Expression usuelle de la chaleur totale d'un solide par unité de volume, en fonction de sa température, supposée modérément variable..... 96

SEPTIÈME LEÇON. — *Étude des flux de chaleur; réduction de ces flux, pour tous les éléments plans d'une particule, à un courant unique traversant la particule.*

45. Quasi-neutralisation des flux qui pénètrent à travers les faces d'un élément de volume 99
46. Équivalence de la chaleur entrée dans un élément, par sa superficie, à la somme des flux passés à travers les diverses faces de l'élément, en venant du dehors 100
47. Démonstration du principe de quasi-neutralisation des flux..... 102
48. Extension du principe de quasi-neutralisation aux éléments de volume diathermanes et à ceux qui contiennent une source de chaleur..... 103
49. Continuité des flux de chaleur, ramenés à l'unité d'aire et relatifs aux éléments plans qui se déplacent parallèlement à eux-mêmes 105
50. Égalité des flux, à travers les deux faces de la couche séparative de deux corps ou milieux contigus 107

Digitized by Google

Pages.

51. Tétraèdre de Cauchy : éléments plans principaux et flux calorifiques principaux, relativement aux axes coordonnés..... 107
52. Expression d'un flux quelconque en fonction des trois flux principaux relatifs aux axes..... 110
53. Expression du même flux quelconque en fonction du flux maximum et de l'angle des deux plans qu'ils traversent..... 110
54. Réduction de tous les flux calorifiques, dans chaque petite région d'un corps quelconque, à un courant de chaleur, qui y traverse les divers éléments plans suivant une même direction..... 111

HUITIÈME LEÇON. — *Les flux de chaleur, fonctions de la rapidité des chutes de température entre points voisins et de la contexture.*

55. Relations entre les flux de chaleur et la température ou surtout ses dérivées dans les divers sens; coefficients de conductibilité..... 114
56. Condition imposée à ces coefficients, par le fait d'une chute positive de température le long du courant de chaleur..... 115
57. Expression du courant de chaleur dans une particule isotrope..... 118
58. Formule d'un flux quelconque dans une telle particule..... 120
59. Expression des flux de chaleur dans une particule de contexture symétrique..... 121
60. Cas où l'on ne donne que deux axes principaux de symétrie..... 122
61. La symétrie par rapport à des axes principaux équivaut à la symétrie par rapport aux plans qui leur sont perpendiculaires..... 123
62. Formules de transformation pour les flux principaux, quand on change d'axes coordonnés..... 124
63. Des conductibilités d'un milieu quelconque suivant le courant de chaleur et suivant la pente des températures..... 127
64. Lois de la conductibilité suivant la pente des températures..... 128
65. Existence, dans toute particule, de trois axes rectangulaires de conductibilité, qui constituent une extension des axes principaux d'une particule symétrique..... 129

NEUVIÈME LEÇON. — *Potentiel des flux dans une particule symétrique, et construction des courants de chaleur dans une particule quelconque.*

66. Existence et signification du potentiel des flux de chaleur, dans les milieux à conductibilités indirectes égales deux à deux..... 132
67. Extension des propriétés de ce potentiel à tous les systèmes de coordonnées rctangles..... 133
68. Ellipsoïde principal..... 136
69. Construction des courants de chaleur, dans le cas d'une contexture symétrique..... 138
70. Passage au cas d'une contexture non symétrique..... 140
71. Ellipsoïde des conductibilités..... 143
72. Construction générale des courants de chaleur..... 145
73. Construction, inverse, des éléments isothermes..... 147
74. Milieux non symétriques inverses l'un de l'autre, à ellipsoïdes communs..... 147

Digitized by Google

DIXIÈME LEÇON. — *Autres constructions relatives à la conductibilité, et applications aux barres, aux plaques, aux corps cristallisés.*

Pages.

75. Autre emploi du système des deux ellipsoïdes principal et des conductibilités 148
76. Chaque flux est réglé par la chute de température suivant une direction fixe correspondante 149
77. D'un ellipsoïde des conductibilités considéré par Lamé 150
78. Éléments plans pour lesquels les flux de chaleur dépendent des dérivées de la température dans un plan donné 151
79. Éléments plans isothermes qui correspondent aux courants de chaleur rasant un plan donné 152
80. Application de la théorie de la conductibilité aux barres minces 153
81. Surfaces isothermes des barres 155
82. Application aux plaques minces; leurs surfaces isothermes 155
83. Comment s'y expriment les flux de chaleur par les chutes de température dans le feuillet moyen 157
84. Autre méthode pour l'étude des barres et des plaques 158
85. Application aux cristaux : cas où il y a un axe de symétrie principal. 159
86. Cas où le cristal offre, outre un axe principal, d'autres éléments de symétrie 161

ONZIÈME LEÇON. — *Équations régissant les variations qu'éprouve, d'un instant à l'autre, la température aux divers points d'un corps ou d'un système de corps.*

87. Ce que devient l'équation de l'énergie d'un corps vibrant calorifiquement, quand on y introduit la température 163
88. Équation indéfinie, aux dérivées partielles, de la température 165
89. Autre démonstration, où cette équation est établie à partir de volumes quelconques 167
90. Chaleur que les flux introduisent en chaque endroit, par unités de volume et de temps 169
91. Existence de conditions spéciales aux surfaces limites 170
92. Échauffement ou refroidissement par rayonnement 171
93. Analogie et contraste des deux conductibilités intérieure et extérieure. 173
94. Échauffement ou refroidissement par convection 174
95. Raison d'une conductibilité extérieure alors beaucoup plus grande : échauffement et refroidissement par contact 175
96. Des cas où le flux entrant est directement donné 176
97. Conditions relatives à la surface de séparation de deux corps ou de deux parties d'un même corps 177

Digitized by Google

DOUZIÈME LEÇON. — *Détermination complète des températures successives par les équations ou conditions précédentes; cas simples du refroidissement et des températures stationnaires; propriétés de l'ellipsoïde principal dans un milieu homogène.*

Pages.

98. Existence d'une solution des équations ou conditions précédentes..... 180
99. Unité de la solution..... 183
100. Problème particulier du refroidissement..... 186
101. Existence d'un état permanent, ou de températures stationnaires possibles, quand les températures extérieures sont invariables et les sources de chaleur constantes..... 189
102. Unité de la solution du problème des températures stationnaires..... 191
103. Tendance effective et asymptotique des températures réelles vers leurs valeurs permanentes..... 193
104. Équation indéfinie des températures dans un corps homogène : cas d'un corps isotrope..... 194
105. Cas d'un corps hétérotrope..... 194
106. Équation des températures, quand on rapporte le corps à des diamètres conjugués de son ellipsoïde principal..... 195
107. Surfaces isothermes dans un milieu homogène indéfini, chauffé en un de ses points..... 198

TREIZIÈME LEÇON. — *Réduction du problème général de l'échauffement aux deux questions du refroidissement simple et des températures stationnaires; cas particulier d'un échauffement périodique.*

108. Sur la réduction du problème général de l'échauffement..... 201
109. Cas d'un échauffement élémentaire, c'est-à-dire d'un seul changement survenu dans les causes de l'échauffement considéré..... 202
110. Décomposition de l'échauffement effectif en échauffements élémentaires..... 204
111. Cas particulier où les températures extérieures et les débits des sources de chaleur deviennent périodiques..... 206
112. Alors les températures du système le deviennent elles-mêmes asymptotiquement..... 208

QUATORZIÈME LEÇON. — *Application de la théorie précédente au sol terrestre.*

113. Application aux inégalités annuelle et diurne de la température du sol terrestre; exposé du problème..... 210
114. Calcul de chaque inégalité pendulaire entrant dans leur expression... 213
115. Loi régissant l'amplitude des variations de la température dans le sol. 215
Réflexions sur les températures de l'éther à la surface des corps, et spécialement du sol terrestre (Note)..... 218
116. Lois régissant les retards des mêmes variations sur celles de la température extérieure..... 220
117. Détermination des paramètres δ et μ, ou a et h, par l'observation de l'inégalité annuelle : vérifications expérimentales..... 221

Digitized by Google

Pages.

118. Mise en compte de l'accroissement des températures moyennes dans le sol avec la profondeur 226

QUINZIÈME LEÇON. — *Problème général du refroidissement; étude du cas où il y a un potentiel des flux de chaleur.*

119. Réduction approchée des équations du refroidissement simple à un système d'équations différentielles linéaires, homogènes et à coefficients constants 229
120. Rappel de la forme que présente l'intégrale générale de ce système ... 231
121. Conclusion qui s'en déduit, touchant l'expression générale des températures, dans le problème du refroidissement 234
122. Recherche plus explicite des solutions simples, dans le cas d'un corps à contexture symétrique ou pourvu d'un potentiel des flux de chaleur. 237
123. Ces solutions simples ne contiennent aucun facteur trigonométrique dépendant du temps t 238
124. Elles ne contiennent non plus aucun facteur algébrique en t 240
125. Les exponentielles e^{-mt} sont essentiellement décroissantes 243

SEIZIÈME LEÇON. — *Suite : méthode d'élimination de Fourier; état pénultième du refroidissement.*

126. Le produit de deux solutions simples a sa valeur moyenne dans tout le système égale à zéro 246
127. L'équation en m a toutes ses racines réelles 248
128. Méthode d'élimination de Fourier, pour le calcul des coefficients c d'amplitude des diverses solutions simples, d'après l'état initial..... 249
129. État pénultième ou régularisé du système 252
130. Uniformité de signe de la solution simple fondamentale 254
131. La température et ses deux premières dérivées relatives au temps forment, en valeur absolue moyenne, une certaine proportion continue 256

DIX-SEPTIÈME LEÇON. — *Application à l'armille; températures stationnaires et refroidissement de ce corps.*

132. Application à l'armille; équations du problème 258
133. Étude préalable des températures stationnaires de l'armille 260
134. Intégration des équations du refroidissement de l'armille 264
135. États pénultième et antépénultième de l'armille; vérification expérimentale 270

DIX-HUITIÈME LEÇON. — *Refroidissements comparés de la sphère et du cube.*

136. Expériences de Fourier sur le refroidissement de corps sphériques et cubiques 273
137. Refroidissements comparés d'une sphère et du cube circonscriptible à la sphère : cas d'une conductibilité extérieure très petite 274

Digitized by Google

Pages.

138. Suite : Cas opposé d'une conductibilité extérieure très grande ; refroidissement de la sphère 275
139. Refroidissement du cube dans le même cas d'une conductibilité extérieure très grande 277
140. Comparaison des refroidissements de la sphère et du cube; confrontation expérimentale 280
141. Refroidissements de la sphère et du cube, dans le cas d'une conductibilité extérieure quelconque 281
Comment se calculera le refroidissement d'un parallélépipède rectangle (Note) 284
142. Comparaison, dans ce cas général, des deux refroidissements de la sphère et du cube 285

DIX-NEUVIÈME LEÇON. — *Étude plus complète de la sphère; problème du refroidissement du cylindre circulaire.*

143. Équation déterminant, dans la sphère, les températures moyennes de chaque couche sphérique et les températures vraies du centre 289
144. Extension des formules de refroidissement aux corps diathermanes 292
145. Problème général du refroidissement de la sphère homogène et isotrope ; manière de le traiter par les fonctions sphériques 293
Calcul des variations de température d'une enveloppe sphérique à faces imperméables (Note) 296
146. Formation des solutions simples 297
147. Détermination des coefficients d'amplitude par la méthode de Fourier. 302
148. Rapide nivellement des températures dans chaque couche sphérique ... 306
Températures stationnaires de la sphère, calculées par la même méthode (Note) 308
149. Refroidissement du cylindre circulaire, d'une sphère creuse et d'un cylindre creux ; retour sur l'armille 309
150. Raison d'être des racines multiples trouvées dans les problèmes simples de refroidissement 313

VINGTIÈME LEÇON. — *Aperçus sur le problème du refroidissement des corps à contexture non symétrique; applications et analogies diverses.*

151. Aperçus sur le problème du refroidissement, dans le cas d'un système à contexture non symétrique 315
152. De quelques cas où la solution s'obtient en opérant comme si la contexture était symétrique 317
153. Sur d'autres questions, non traitées ici 319
154. Nombreuses analogies de ces questions avec d'autres, étrangères à la théorie de la chaleur 321
155. Analogie des phénomènes de propagation de la chaleur avec ceux de filtration des fluides 323
156. Théorie du calorique qui résulterait de cette analogie, si la chaleur était un fluide ; et, d'abord, recherche de la formule des flux de chaleur 324

Digitized by Google

Pages.
157. Établissement de cette formule générale des flux de chaleur..... 327
158. Équations indéfinie et définies, aux dérivées partielles, de la température; difficultés de cet essai de théorie..... 328
159. Complications qu'y entraînerait le fait de l'énorme condensation de la chaleur dans les corps..... 330
160. Analogie des mêmes phénomènes de filtration d'un fluide expansif avec ceux de diffusion des solutions étendues..... 332

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME I.

Digitized by Google

Digitized by Google

ERRATA.

Page 48, dernière ligne, *lire* z se change en y.

Page 93, deuxième ligne en remontant, *au lieu de* les échelles, *lire* l'échelle.

Page 129, ligne 6, après cos γ, *ajouter* cosinus non susceptibles de s'annuler tous à la fois.

Page 138, ligne 2 en remontant, et page 139, ligne 5, *au lieu de* MP', *lire* MP.

Page 141, à la figure, *au lieu de* (Y, Y, Z), *lire* (X, Y, Z).

Page 171, ligne 5 en remontant, *après les mots* sous cette couche, *ajouter en note :*

(1) Nous considérons la température intérieure u sous la couche superficielle, pour n'avoir pas à nous occuper de son mode *inconnu* de variation à travers cette couche; mais, en réalité, elle y change très peu, rien ne l'obligeant à égaler, même *sur* la surface, la température de l'éther, qui est une tout autre fonction. Il est vrai que, dans le cas où une atmosphère très étendue environnera le corps, nous supposerons, le plus souvent, cette atmosphère à une température générale ou moyenne u_e sensiblement uniforme, et l'éther partout à cette température même u_e. Mais celle-ci ne sera pas du tout la température des couches fluides contiguës au corps, laquelle, peu différente de u contre le corps, variera rapidement avec la distance à sa surface, en tendant vers u_e.

Page 175, lignes 6 et 7, *permuter les mots* refroidissement *et* échauffement.

Page 274, ligne 4, *après* résultat, *lire* circonstance dont nous pourrons...

Page 322, lignes 6 et 7, *lire* au point qu'il pourrait lui être identique...

Digitized by Google

Digitized by Google

THÉORIE ANALYTIQUE

DE

LA CHALEUR.

TOME I.

PREMIÈRE LEÇON.

OBJET DE LA THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR;
NÉCESSITÉ DE L'ÉDIFIER SUR CE FAIT, QUE LA CHALEUR EST DE L'ÉNERGIE
ET NON DE LA MATIÈRE.

1. **Objet de la théorie analytique de la chaleur.** — L'on a su de tout temps que, lorsque des corps contigus, ou différentes parties d'un même corps, ne sont pas à une température uniforme, la chaleur se porte de leurs particules les plus chaudes aux plus froides, chauffant celles-ci en laissant refroidir plus ou moins les premières; et que, de même, à travers la surface de ces corps, elle se porte vers le milieu extérieur ou le quitte, suivant qu'ils sont plus chauds ou plus froids que lui. Ces déplacements de chaleur, liés, d'une part, aux inégalités actuelles de la température, qui les provoquent, d'autre part, à ses variations successives, qui nous les révèlent, et surtout ces dernières variations elles-mêmes, sont l'objet de la théorie analytique de la chaleur. L'on y soumet principalement au calcul la répartition ou variable avec le temps,

Digitized by Google

ou, parfois, stationnaire et persistante, des températures, dans les solides *athermanes,* c'est-à-dire dans les solides qui ne se laissent pas traverser par la chaleur sans l'absorber d'abord, ou qui se chauffent avant d'en céder une partie plus ou moins grande à leurs voisins.

2. Coup d'œil sur l'histoire de cette branche de la Physique mathématique : travaux antérieurs à Fourier. — Cette branche de science ne pouvait évidemment pas éclore avant l'invention du thermomètre, l'instrument indispensable pour préciser la notion des températures et donner de celles-ci une évaluation quantitative.

Elle a débuté, au XVIIe siècle, par la loi de refroidissement, de Newton, consistant en ce que l'excès u de température d'un petit solide préalablement chauffé, sur l'atmosphère en repos (ou animée d'une translation constante) au milieu de laquelle on le laisse refroidir, décroît, du moins quand il n'est pas très fort, comme une exponentielle de la forme e^{-mt}, où t désigne le temps écoulé depuis le début du refroidissement. Newton en déduit que la vitesse $-\frac{du}{dt}$ de celui-ci est proportionnelle à cette exponentielle, ou à l'excès u lui-même [1], et que, par suite, le *flux* de chaleur émané du corps par unité de temps, durant les divers instants successifs du refroidissement, a sans cesse un rapport constant avec la différence actuelle u des températures du corps lui-même et de l'atmosphère environnante. C'était la vue première, manifestée par des circonstances particulièrement simples, d'une loi générale, d'après laquelle les flux de chaleur se règlent, entre particules voisines de matière, proportionnellement aux *chutes de température* existant des unes aux autres, du moins tant que la rapidité de ces chutes, c'est-à-dire le rapport des différences de tempé-

---

[1] La proportionnalité de $-\frac{du}{dt}$ à u, une fois contrôlée expérimentalement ou basée sur l'observation de l'exponentielle, peut être censée s'en déduire, comme je le dis, et en a sans doute été déduite ainsi, en tant que *loi physique,* par Newton lui-même, quoique, selon toute vraisemblance, elle eût été d'abord chez lui une *hypothèse,* provoquée, il est vrai, par un premier aperçu des faits, savoir, la plus simple que cet aperçu suggérât à la raison.

Digitized by Google

rature aux chemins le long desquels elles se produisent, n'excède pas certaines limites dépendant de la nature des corps en présence.

Tel a été le premier signalé, et le plus simple, des cas de températures variables. Un cas de températures stationnaires, le plus simple aussi, et assez analogue au précédent quant à la forme de la loi qui le régit, a été observé, un demi-siècle plus tard, par le physicien Lambert : ce sont les températures qui, dans une longue barre métallique, exposée à l'air, s'établissent aux diverses distances x d'une extrémité, chauffée d'une manière permanente par une source invariable de chaleur. Les excédents u de ces températures sur celle de l'air sont représentés, proportionnellement, par une exponentielle de la forme e^{-ax} : ils décroissent donc, à mesure qu'on s'éloigne de l'extrémité chauffée, comme le faisaient, dans l'expérience de Newton, les excès de température du corps chaud à mesure qu'on s'éloignait du début du refroidissement.

C'est en expliquant ce phénomène d'état permanent, après l'avoir de nouveau et soigneusement observé, que Biot, dans un Mémoire de 1804 (¹), a donné une première ébauche de la théorie analytique de la chaleur. Il a divisé fictivement la barre en tronçons élémentaires, avec petites chutes de température de l'un à l'autre, mesurées proportionnellement par le rapport $-\frac{du}{dx}$; et, d'une part, appliquant la loi de Newton à la chaleur émise dans l'air à travers la surface libre de chaque tronçon, d'autre part, généralisant cette loi pour exprimer les flux qu'il reçoit du tronçon précédent ou envoie au tronçon suivant, il n'a eu qu'à égaler à la différence de ces deux flux la chaleur sortie par la surface libre du tronçon, pour former l'équation différentielle linéaire du second ordre en u et x qui régit le phénomène d'état permanent et conduit immédiatement à la loi de Lambert. Enfin, il a indiqué comment, dans l'état variable préparatoire à l'état permanent et où la différence des deux flux en question excède la chaleur émise par la surface libre, l'excédent s'emmagasine dans le tronçon,

(¹) *Mémoire sur la propagation de la chaleur,* lu à la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut national, par M. Biot (*Bibliothèque britannique,* septembre 1804, t. XXVII, pp. 310 à 323).

Digitized by Google

élève sa température et ajoute ainsi à l'équation précédente un terme en $\frac{du}{dt}$, pour la changer en une équation aux dérivées partielles caractéristique de l'état variable.

3. **Œuvre de Fourier et de ses continuateurs.** — Tel était à peu près l'état de nos connaissances sur la propagation de la chaleur, quand, de 1807 à 1811, Fourier découvrit la manière générale de mettre en équation les problèmes de cette nature, pour les corps à trois dimensions comparables entre elles, et la méthode d'intégration qui leur convient le mieux. Les admirables applications qu'il fit de cette méthode sont, à la fois, assez simples et assez générales, pour avoir servi de modèle aux géomètres de la première moitié de ce siècle ; et elles leur ont été d'autant plus utiles, qu'elles ont pu, avec de légères modifications tout au plus, être transportées dans d'autres branches de la Physique mathématique, notamment dans l'Hydrodynamique et dans la Théorie de l'élasticité.

C'est dans son Traité, ayant pour titre *Théorie analytique de la chaleur*, imprimé en 1822, et dans quelques Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris (ou de la Société philomathique), consacrés en grande partie aux températures terrestres, que Fourier a exposé les résultats de ses travaux. Laplace et surtout Poisson [1] ont complété l'œuvre de Fourier en ce qui concerne les corps *isotropes,* c'est-à-dire pareillement constitués en tous sens, auxquels ils se sont bornés. Puis Duhamel, Lamé, Cauchy et d'autres géomètres plus récents ont, les uns, embrassé le cas de corps *hétérotropes,* comme les cristaux, ou traité des formes de corps plus complexes, l'ellipsoïde par exemple, les autres, donné plus de rigueur à certaines inductions de Fourier, relatives à la nature des séries exprimant le plus souvent les résultats des intégrations, ou même démontré directement la convergence de ces séries dans des cas de plus en plus généraux.

4. **Simplicité relative de la théorie analytique de la chaleur et son rôle dans l'initiation aux méthodes de la Physique mathématique.** — La théorie analytique de la chaleur offre, parmi les prin-

[1] Dans son *Traité sur la Théorie mathématique de la chaleur* (1835).

Digitized by Google

cipales branches de la Physique mathématique, un avantage précieux, qui engage à commencer par elle leur étude. C'est celui d'une plus grande simplicité ou, plutôt, d'une moindre complication. La raison en est double. D'une part, on y considère une seule fonction inconnue, la température u, du temps t et des trois coordonnés x, y, z définissant les divers points du solide étudié, au lieu de trois fonctions inconnues, pour le moins, généralement inévitables dans la plupart des autres branches, savoir, par exemple, les trois composantes, suivant les axes, du petit déplacement moléculaire dans la théorie de l'élasticité, celles de la vitesse dans l'hydrodynamique, etc. D'autre part, l'équation aux dérivées partielles des températures u est seulement du premier ordre par rapport au temps t, les lois physiques déterminant directement, comme on a déjà pu voir (page 2), la *vitesse* d'échauffement *en fonction de l'état actuel,* tandis que, par exemple, les équations de l'élasticité sont du second ordre par rapport au temps; car les lois physiques du mouvement déterminent, en fonction de l'état actuel, les *accélérations* de la matière, et non ses *vitesses,* qu'elles laissent disponibles, c'est-à-dire *arbitraires*, autant que les situations ou coordonnées elles-mêmes.

Par le fait, sans doute, de cette plus grande simplicité, qui n'exclut pas l'analogie avec les autres études également relatives aux corps ayant formes pareilles, ou coordonnées x, y, z comprises entre semblables limites, les formules de la théorie analytique de la chaleur offrent encore l'avantage, tantôt, d'ouvrir la voie pour les questions des autres branches de la Physique mathématique concernant les mêmes corps, et, tantôt, de s'appliquer exactement, sans qu'on eût pu le prévoir, à des problèmes d'apparence beaucoup plus complexe, qui se trouvent cependant conduire aux mêmes questions d'analyse pure, du moins dans leurs cas les plus intéressants.

Il était donc naturel que les géomètres de notre siècle s'initiassent à la Physique mathématique et à ses méthodes par l'étude de la Théorie analytique de la chaleur. C'est à ce point de vue surtout que l'immortel Traité de Fourier a été pour eux, dans le premier tiers du siècle, une sorte de révélation; car, au moment où Fourier publia ses recherches, les procédés d'intégration, pour l'étude des principales questions de Physique qui conduisent à des

Digitized by Google

équations aux dérivées partielles, n'avaient encore été, pour ainsi dire, qu'ébauchés, malgré les travaux si importants et déjà fort étendus de d'Alembert, Daniel Bernoulli, Euler, Lagrange et Laplace.

5. **Hypothèse du rayonnement particulaire, dans les corps athermanes.** — Fourier a pris pour base de sa théorie, comme l'avait fait Biot, l'opinion, toute naturelle ou résultant simplement des plus vulgaires observations, qui assimile la chaleur à une substance indestructible, sans cesse en mouvement pour passer des corps chauds aux corps froids. Supposant les solides composés d'un nombre immense de molécules, maintenues à d'imperceptibles distances les unes des autres, il a regardé ces molécules comme de petits corps qui auraient, chacun, une température distincte et qui, d'instant en instant, se céderaient les uns aux autres de la chaleur d'après la loi de refroidissement de Newton. En d'autres termes, ils formeraient une infinité de couples, représentés, chacun, par la droite r de jonction de deux molécules du corps très voisines, M, M′, ayant leurs températures respectives u, u' peu différentes; et, dans chaque couple, l'une quelconque des molécules, M′, par exemple, enverrait à l'autre M, par unité de temps, une quantité de chaleur sans cesse proportionnelle à l'excès correspondant $u' - u$ de sa température, le coefficient de cette proportionnalité étant d'ailleurs une fonction $F(r)$ très grande aux distances r imperceptibles, surtout dans les corps athermanes, mais devenant, du moins dans ces corps, entièrement négligeable dès que la distance r est sensible. Enfin, l'accroissement élémentaire, ou survenu durant un instant dt, de la température u de la molécule quelconque M, résulterait de la chaleur totale, positive ou négative, envoyée à cette molécule par toutes celles qui l'entourent aux distances imperceptibles, et qui pourraient ainsi *rayonner* sur elle une partie de leur chaleur ou recevoir, au contraire, son *rayonnement*, suivant que leur température serait supérieure ou inférieure à la sienne. La fonction $F(r)$ aurait d'ailleurs les mêmes valeurs pour toutes les orientations de la droite MM′ ou r, dans les corps *isotropes*, c'est-à-dire pareillement constitués en tous sens, auxquels se sont bornés Fourier et Poisson, tandis que, dans les milieux cristallisés qu'ont étudiés ensuite Duhamel et

Digitized by Google

Lamé, elle dépendrait, au contraire, des deux angles définissant la direction de la droite r.

Telle est l'hypothèse du *rayonnement particulaire*. Elle a conduit simplement aux véritables équations approchées de la propagation de la chaleur dans les solides athermanes soit isotropes, soit cristallins avec trois plans rectangulaires de symétrie. Lamé, croyant pouvoir supposer la fonction $F(r)$ différente pour deux directions contraires telles que MM' et $M'M$ (comme s'il lui avait échappé que, dans chaque groupe MM' de deux molécules, la chaleur gagnée par l'une est perdue par l'autre), en a même déduit les équations pour le cas le plus général possible de corps athermanes, c'est-à-dire celles qu'on obtient en faisant dépendre les déplacements de chaleur, dans chaque petite région, du mode de variation qu'y affecte la température [1], sans les réduire à s'effectuer dans chaque couple moléculaire *comme s'il était seul*.

Depuis, les auteurs qui, à ma connaissance, ont publié des Traités ou des Cours sur la Théorie analytique de la chaleur, se sont encore bornés à en déduire les formules de la même hypothèse du rayonnement particulaire.

6. Nécessité d'élargir cette hypothèse et d'en discuter les éléments, à raison de la nature dynamique et non matérielle de la chaleur. — Cependant, depuis Fourier, il s'est produit un fait capital, qui rend désirable l'édification de la théorie sur une base différente, ou, s'il est possible, sur la même base, mais profondément transformée et élargie : c'est la découverte, il y a cinquante ans, de l'équivalent mécanique de la chaleur, ou de l'égalité de chaque calorie à 425^{kgm} environ, découverte montrant que la chaleur s'évalue non comme une masse, à la manière d'une quantité de matière, mais en kilogrammètres, et qu'elle est, par conséquent, de la nature d'une demi-force vive ou d'un travail. Des deux anciennes manières d'expliquer la chaleur entre lesquelles hésitaient depuis des siècles les philosophes et les physiciens, savoir, celle qui attribue nos sensations de *chaud* à la présence d'une substance spéciale dite *calorique*, et celle qui n'y voit que le re-

---

[1] C'est de cette dernière manière que j'ai procédé dans ma thèse de doctorat *Sur la propagation de la chaleur* (Paris; Gauthier-Villars, 1867).

Digitized by Google

tentissement en nous d'une agitation imperceptible des parties ultimes des corps, la seconde seule est, dès lors, restée admissible; et l'on ne peut désormais se représenter la chaleur que comme étant, en partie, la demi-force vive ou *énergie actuelle* de ce mouvement invisible, et, en partie, la *réserve* de travail, l'*énergie potentielle,* que consomment ou emmagasinent à tour de rôle les forces *de ressort* en jeu dans ce même mouvement vibratoire.

A la vérité, tant qu'on se borne, comme nous le ferons ici, aux solides dont la température ne varie que modérément, assez peu pour que leurs dilatations calorifiques soient insignifiantes, il est permis de négliger les transformations de chaleur en travail mécanique proprement dit, ou travail corrélatif à des déplacements visibles, et les transformations inverses de travail en chaleur; de sorte que la somme totale d'énergie à considérer, en tant que représentative de la chaleur, peut être censée invariable, comme le serait, dans l'hypothèse de la matérialité de celle-ci, la quantité correspondante de *calorique*.

Mais cela ne suffit pas pour qu'on puisse l'assimiler effectivement à une matière. Il faut encore, d'une part, qu'on puisse localiser dans les diverses particules du système, à la manière d'un fluide qui les pénétrerait, non seulement l'énergie calorifique actuelle, qui s'y prête par le fait même qu'elle est la demi-force vive d'agitation de ces particules, mais aussi l'énergie calorifique potentielle, qui, exprimant une dépendance ou des relations entre les points matériels du système, n'appartient pas exclusivement à l'un ou à l'autre de ceux-ci. Et il faut, en outre, que la région de l'espace où sera, à des instants successifs, une quantité donnée, quelconque et constante, d'énergie calorifique, ait ses limites variables avec continuité, ou incapables de prendre successivement deux positions sans avoir passé par toutes les situations intermédiaires; car une matière quelconque ne se déplace que de cette manière, ou progressivement.

Enfin, dans l'hypothèse qui fait de la chaleur une énergie liée à l'agitation imperceptible de la matière, la température ne peut avoir une valeur distincte pour chaque point matériel en vibration. En effet, le mouvement d'un point affectera, durant tout instant de longueur à peine sensible, les phases et les vitesses les plus variées, tandis que la température sera quelque chose d'essentielle-

Digitized by Google

ment indépendant de ces phases, quelque chose ou de persistant ou de très lentement variable, en comparaison des phases dont il s'agit : elle exprimera un état *général* de mouvement, un degré *moyen* d'agitation, supposant et concernant des myriades de points matériels dans le petit espace où on la considérera. Il n'est donc plus possible d'attribuer, avec Fourier, une température propre à chaque point matériel du corps, ni, par conséquent, de ramener les échanges de chaleur à un rayonnement intermoléculaire, réglé, dans chaque groupe de *deux* molécules, sur la différence de leurs températures.

Ainsi, tout est à examiner à fond et à remanier, dans les bases de la théorie de la propagation de la chaleur, pour y mettre les démonstrations en harmonie avec la Thermodynamique. C'est ce que nous essayerons de faire dans ce Cours.

7. **Rappel du principe de l'énergie, sur lequel reposera la théorie nouvelle.** — La chaleur étant une forme de l'énergie, il est clair que le premier fondement de la théorie nouvelle sera le principe même de l'énergie ou de la conservation des forces vives. Rappelons donc brièvement en quoi consiste ce principe.

Soient M, M′, M″, ... les points matériels ou éléments du corps à considérer, qui seront, en général, ses molécules chimiques ; car nous aurons rarement à leur attribuer des dimensions et à mettre en compte leurs vibrations intérieures, c'est-à-dire à remonter jusqu'aux atomes. Appelons m, m', m'', ... les masses de ces points ; V, V′, V″, ... leurs vitesses à l'époque t ; $\Sigma\frac{1}{2}m\mathrm{V}^2$ leur demi-force vive totale ; enfin (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z''), ... leurs coordonnées, relatives à un système d'axes rectangulaires fixes, et r, r', r'', ... leurs droites de jonction deux à deux, r étant, par exemple, la longueur MM′ ou $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$.

Autant qu'a permis d'en juger une expérience constante, et pourvu que l'on ne néglige pas plus le mouvement invisible que le mouvement visible, toutes les actions mutuelles des points du système considéré admettent ce que l'on appelle une *fonction des forces,* de la forme $-\Psi(r, r', r'', \ldots)$, fonction telle, que l'action, par exemple, de M′ sur M, dirigée de M vers M′, a la valeur $\frac{d\Psi}{dr}$ ou les trois composantes respectives $-\frac{d\Psi}{d(x, y, z)}$ suivant les x, y, z

Digitized by Google

positifs, et telle, par suite, que les deux actions mutuelles des points M, M′ reliés par la droite r, produisent ensemble, durant l'instant dt, un travail égal à la différentielle partielle correspondante $-\frac{d\Psi}{dr}dr$. Par suite encore, le travail élémentaire des actions intérieures du corps est, en tout, la différentielle totale $-d\Psi$, ou le décroissement éprouvé par la fonction Ψ durant l'instant dt.

On peut donc imaginer que cette fonction Ψ, variable avec les distances $r, r', r'', \ldots$, c'est-à-dire avec la configuration du corps, représente une provision, un *capital de travail,* caché dans le corps, et dont la diminution d'un moment à l'autre, le *débit* à chaque instant extrait en quelque sorte du corps par la déformation ou la contraction qu'il subit, constitue le travail même de ses actions intérieures et se manifeste en lui, par conséquent, comme accroissement de demi-force vive, du moins quand ce corps n'est pas en même temps soumis à des actions extérieures dont le travail soit négatif. En effet, la formule classique des forces vives ou du travail donne, comme accroissement élémentaire $d\Sigma\frac{1}{2}mV^2$ de la demi-force vive du système, le travail $-d\Psi$ des actions intérieures, plus le travail des forces extérieures ; de sorte que, si l'on appelle $d\mathfrak{T}_e$ celui-ci (*travail extérieur*), on aura l'équation $d\Sigma\frac{1}{2}mV^2 = -d\Psi + d\mathfrak{T}_e$. Donc, quand $d\mathfrak{T}_e$ n'est pas négatif, il y a un accroissement de la demi-force vive égal à $d\mathfrak{T}_e$ et un autre égal à $-d\Psi$. En d'autres termes, chaque *dépense* $-d\Psi$ de la provision Ψ de travail se révèle comme accroissement $d\Sigma\frac{1}{2}mV^2$ de la demi-force vive du système, et le capital Ψ de travail, caché dans le corps, est susceptible, en s'employant plus ou moins, d'accroître d'autant la somme de son mouvement, exprimée par sa demi-force vive. Quand il ne produit pas cet effet, il neutralise du moins un travail extérieur négatif $d\mathfrak{T}_e$, c'est-à-dire s'oppose à ce que celui-ci réduise la somme de mouvement du corps.

Or, produire du mouvement ou neutraliser du travail négatif, c'est *déployer,* manifester *de l'énergie*. Donc le capital Ψ, déterminable à une constante près par l'observation des mouvements successifs du système, exprime le *pouvoir* total d'énergie des forces intérieures : il mesure l'*énergie en puissance* (ou en germe) du système considéré, celle dont il est *capable*. De là, le le nom d'*énergie potentielle* qu'on lui a donné. Et comme, en se

Digitized by Google

manifestant, en passant de la *puissance* à l'*acte*, suivant l'expression d'Aristote relative à toute énergie mécanique ou autre, elle se montre sous forme de demi-force vive, la demi-force vive totale $\Sigma \frac{1}{2} m V^2$ peut être regardée comme de l'énergie potentielle qui s'est réalisée ou qui a acquis l'*existence* effective, de pure *essence* ou pure puissance qu'elle était d'abord ; aussi l'appelle-t-on l'*énergie actuelle* du système ou du corps considéré.

Alors l'équation des forces vives, écrite

$$d(\Psi + \Sigma \tfrac{1}{2} m V^2) = d\mathfrak{T}_e,$$

exprime que l'*énergie totale du système, somme de ses deux énergies potentielle et actuelle, s'accroît, d'un instant à l'autre, du travail total* $d\mathfrak{T}_e$ *que produisent les actions extérieures appliquées à ses divers points.*

Tel est le *Principe de l'énergie,* dont nous aurons à faire usage dès la prochaine leçon [1].

---

[1] Pour plus de détails sur ce principe, on peut consulter mes *Leçons synthétiques de Mécanique générale* (nos 16 à 33, 84 à 88, 106 à 112, etc.).

Digitized by Google

DEUXIÈME LEÇON.

APPLICATION DU PRINCIPE DE L'ÉNERGIE A UN SOLIDE QUI S'ÉCHAUFFE OU SE REFROIDIT : DÉFINITION DYNAMIQUE DES CHALEURS SENSIBLE, POTENTIELLE, TOTALE ET DES FLUX DE CHALEUR.

8. Notion de l'agitation calorifique. — L'énergie totale d'un corps ayant sa différentielle donnée par l'équation

$$(1) \qquad d\Sigma \tfrac{1}{2} m V^2 + d\Psi(r, r', r'', \ldots) = d\mathfrak{T}_e,$$

c'est-à-dire équivalente au travail $d\mathfrak{T}_e$ des forces qui agissent du dehors sur le corps, voyons comment s'exprimeront, en général, son énergie actuelle $\Sigma \frac{1}{2} m V^2$, son énergie potentielle $\Psi(r, r', r'', \ldots)$, enfin le travail *extérieur* $d\mathfrak{T}_e$.

Il faudra concevoir les points matériels composant le corps, que nous appellerons, pour abréger, ses *molécules*, animés de mouvements visibles quelconques, et, de plus, soumis à de vifs mouvements vibratoires, d'amplitudes très faibles et de périodes extrêmement courtes, constituant une agitation imperceptible à nos sens en tant que mouvement, quoique appréciable dans son ensemble comme sensation de chaleur.

Nous aborderons, dans les leçons suivantes, la question de savoir quelle peut être la nature de cette agitation calorifique. Mais il importe, dès à présent, de remarquer que, d'après les faits observés, les vibrations qui la produisent s'effectuant d'une manière irrégulière et confuse, la phase, l'amplitude, peut être même la période, peuvent varier sans continuité d'une molécule à la voisine, d'une oscillation à la suivante. Nous n'employons donc ici le mot *vibration* qu'en étendant son sens ordinaire, et

Digitized by Google

pour désigner un mouvement très rapide de chaque molécule autour d'une situation moyenne.

Si nous désignons par x, y, z les coordonnées de cette situation, ou *coordonnées moyennes* de la molécule M, ses coordonnées véritables seront à chaque instant

$$x+\xi,\quad y+\eta,\quad z+\zeta,$$

ξ, η, ζ étant les projections, sur les axes, de l'*élongation* du point M par rapport à sa situation moyenne. Ces trois quantités sont des fonctions du temps t très petites en valeur absolue : mais, par suite de l'extrême rapidité des ébranlements calorifiques, leurs dérivées $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, qui représentent les composantes de la *vitesse vibratoire* de la molécule, atteignent des grandeurs notables. Elles dépassent même souvent, en valeur absolue, les projections $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ de la *vitesse visible* du point M, quand celui-ci fait partie d'un corps en mouvement.

9. **Rapides changements de sens qu'y éprouvent les vitesses soit dans le temps, soit dans l'espace.** — Nous pourrons, d'après cela, énoncer les deux remarques suivantes, capitales pour l'étude de l'agitation calorifique.

1° Dans un temps τ extrêmement court, insuffisant pour que les éléments $x, y, z, \frac{d(x, y, z)}{dt}$ du mouvement *visible* éprouvent des changements appréciables, les écarts ξ, η, ζ et leurs dérivées $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$, caractéristiques du mouvement *calorifique,* prennent toute la série de leurs valeurs tant positives que négatives, autour de la moyenne *zéro*.

2° Tandis que x, y, z, $\frac{d(x, y, z)}{dt}$, éléments du mouvement visible, varient graduellement d'une molécule à ses voisines et sont à très peu près les mêmes pour les myriades d'entre elles qui composent toute particule perceptible, les phases, les amplitudes, les périodes même du mouvement vibratoire calorifique changent rapidement d'une molécule à l'autre ; au point que les plus voisines d'entre elles peuvent avoir, au même instant t, des élongations et des vitesses vibratoires très différentes, peut-être même opposées,

Digitized by Google

et que le centre de gravité de la particule n'en est pas affecté, la moyenne des déplacements et des vitesses vibratoires suivant un axe quelconque s'annulant très sensiblement, à chaque instant, dans toute étendue même à peine perceptible.

10. Décomposition de la demi-force vive d'une particule de matière en énergie actuelle du mouvement visible et en énergie actuelle calorifique. — Les composantes de la vitesse d'une molécule M sont, en tenant compte de l'agitation calorifique,

$$\frac{dx}{dt}+\frac{d\xi}{dt},\quad \frac{dy}{dt}+\frac{d\eta}{dt},\quad \frac{dz}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}.$$

On aura donc, pour cette molécule de masse m,

$$\begin{aligned}\frac{mV^2}{2}&=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\\&+\frac{m}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]+m\left[\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right];\end{aligned}$$

et l'énergie actuelle d'un petit élément de volume $d\varpi$ sera donnée par la formule

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\sum\frac{mV^2}{2}&=\sum\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\\&+\sum\frac{m}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]\\&+\sum m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right),\end{aligned}\right.$$

les signes Σ s'étendant à tous les points matériels, en nombre immense, de l'élément $d\varpi$.

Mais le dernier terme, triple, de cette expression est négligeable. En effet, comme les composantes $\frac{d(x, y, z)}{dt}$ du mouvement visible sont sensiblement pareilles pour toutes les molécules de l'élément $d\varpi$, ce terme devient, à très peu près,

$$\frac{dx}{dt}\sum m\frac{d\xi}{dt}+\frac{dy}{dt}\sum m\frac{d\eta}{dt}+\frac{dz}{dt}\sum m\frac{d\zeta}{dt}.$$

Or les myriades de molécules dont il s'agit ont leurs vitesses vibratoires $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ les unes positives, les autres négatives, et de

Digitized by Google

toutes les grandeurs possibles entre leurs limites de variation. D'après la loi, à la fois rationnelle et expérimentale, dite *loi des grands nombres,* d'une application si universelle aux faits accidentels dans tous les ordres de phénomènes, et que met en relief la statistique non moins que le calcul des probabilités, nous sommes donc conduits à regarder les sommes *algébriques* $\sum m \frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ comme composées de termes se détruisant mutuellement, ou, plutôt, leurs produits par $\frac{d(x, y, z)}{dt}$ comme négligeables, *en comparaison* des sommes *arithmétiques* que constituent les autres termes de l'expression ci-dessus de $\sum \frac{mV^2}{2}$, où ces autres termes, sans être, en général, plus forts que les derniers, sont tous de même signe.

C'est, d'ailleurs, ce qu'exprimait succinctement un principe précédent, touchant la non-participation des centres de gravité des particules au mouvement calorifique. Car ce principe signifie que les coordonnées du centre de gravité de l'élément $d\varpi$, quotients respectifs, par Σm, des sommes $\Sigma m(x+\xi)$, $\Sigma m(y+\eta)$, $\Sigma m(z+\zeta)$, ou de $\Sigma mx + \Sigma m\xi$, $\Sigma my + \Sigma m\eta$, $\Sigma mz + \Sigma m\zeta$, ont même dérivée en t que si les termes $\Sigma m\xi$, $\Sigma m\eta$, $\Sigma m\zeta$ étaient nuls. On doit donc bien avoir

$$\frac{d}{dt}(\Sigma m\xi,\ \Sigma m\eta,\ \Sigma m\zeta) = 0.$$

D'après la formule (2) ainsi simplifiée, *l'énergie actuelle de chaque élément de volume matériel est la somme des deux énergies actuelles qu'il posséderait séparément, s'il éprouvait ou son mouvement visible seul, ou son mouvement calorifique seul.*

11. Chaleur sensible d'un corps. — La demi-force vive provenant des vitesses invisibles représente précisément le travail que nos sens perçoivent dans son ensemble comme chaleur. Car, si elle n'existait pas dans les corps que nous touchons, et, par suite, ne se communiquait pas de ces corps au nôtre, aucune agitation ne viendrait ébranler les nerfs étalés sous la surface de tous nos organes, et nous ne sentirions ni impression de chaleur, par l'accroissement des imperceptibles vibrations de notre système nerveux au

Digitized by Google

delà de leur état normal, ni sensation de froid, par leur décroissement en deçà. Aussi appellerons-nous cette demi-force vive d'un corps la *chaleur sensible* de ce corps. Et nous l'évaluerons généralement en (grandes) *calories;* ce qui reviendra à diviser par 425 environ sa valeur en kilogrammètres.

Dans les phénomènes de propagation du mouvement invisible à l'intérieur des solides, que nous nous proposons ici d'étudier, les déplacements d'ensemble des particules restent extrêmement petits. L'énergie actuelle aura donc sa première partie négligeable vis-à-vis de la chaleur sensible, et, pour l'élément de volume $d\varpi$, elle sera simplement

$$\sum \frac{m}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right].$$

Nous pourrons la rapporter à l'unité de volume; car, sauf dans des cas exceptionnels de discontinuité, les particules contiguës d'égal volume composant l'élément $d\varpi$ affecteront toutes, à très peu près, le même état physique et posséderont la même demi-force vive. Nous exprimerons donc la chaleur sensible de l'élément $d\varpi$ par $\alpha\, d\varpi$, où α, *chaleur sensible de l'unité de volume* pour la matière entourant un point matériel quelconque M de l'élément, sera une fonction graduellement variable des coordonnées visibles ou *moyennes* x, y, z de M et aussi, généralement, du temps t. Enfin, la chaleur sensible d'un volume fini ϖ du corps aura pour expression l'intégrale $\int_\varpi \alpha\, d\varpi$, où l'indice ϖ au bas du symbole $\int$ signifie que la sommation doit s'étendre à tous les éléments de ϖ.

12. Décomposition de l'énergie potentielle en deux parties, dont la première est l'énergie de pesanteur. — L'énergie potentielle $\Psi(r, r', r'', \ldots)$ d'un corps de volume ϖ est fonction des droites de jonction $r, r', r'', \ldots$ reliant entre elles les molécules de ce corps. Sa dérivée partielle $\frac{d\Psi}{dr}$ représente l'action mutuelle, dirigée suivant MM', des deux molécules M et M' réunies par la droite r, cette action étant une *attraction* ou une *répulsion* suivant que la dérivée est positive ou négative.

Les actions entre molécules se divisent en deux classes : celles

Digitized by Google

qui s'exercent à des distances perceptibles et celles qui s'exercent à des distances imperceptibles.

La loi de Newton sur l'attraction universelle régit les premières; de sorte que, si nous représentons par f l'attraction de deux masses égales à l'unité et placées à l'unité de distance, nous aurons comme formule de l'attraction entre deux molécules de masses m, m', séparées par une distance r,

$$\frac{d\Psi_1}{dr} = f\frac{mm'}{r^2},$$

$\Psi_1(r, r', r'' \ldots)$ étant la partie de l'énergie potentielle où figureront les distances r perceptibles. Il viendra donc, pour tout le corps,

$$d\Psi_1(r, r', r'', \ldots) = \sum f\frac{mm'}{r^2}dr = d\left(-\sum f\frac{mm'}{r}\right),$$

et, en intégrant, sans ajouter une constante arbitraire qu'on pourrait tout autant faire porter sur l'autre partie de Ψ,

$$\Psi_1 = -\sum f\frac{mm'}{r}.$$

Le signe Σ s'y étend à tous les couples de molécules où la distance r est assez grande pour que l'action mutuelle de ces molécules soit régie par la loi de Newton.

Cette fonction Ψ_1 est l'énergie potentielle de pesanteur, celle que mettent en jeu les grands phénomènes de mouvement étudiés surtout par la Mécanique céleste. Ici nous pourrons la négliger; car elle demeurera constante, tant à raison de ce fait, que les distances *sensibles* entre molécules ne varient pour ainsi dire pas, dans les petites déformations d'un solide liées aux changements de sa température, qu'à cause de l'excessive petitesse du facteur f, suffisante pour rendre insensibles les attractions newtoniennes, sauf entre masses extrêmement considérables.

13. Énergie potentielle interne : on peut la rapporter à l'unité de volume. — Soit maintenant Ψ_2 la partie de l'énergie potentielle où figureront les distances r imperceptibles, celle qui résulte des actions dites *moléculaires*. Ces actions, que chaque molécule exerce seulement, tout autour d'elle, dans sa *sphère d'activité*, d'un très petit rayon ρ, sont attractives ou répulsives suivant la

Digitized by Google

distance mutuelle (inférieure à ρ) des molécules du couple considéré. Répulsives aux distances les plus faibles, avec des intensités assez vite croissantes, en sens inverse de la distance, pour assurer l'*impénétrabilité* de la matière en s'opposant au contact géométrique ou absolu de deux atomes quelconques, elles deviennent attractives pour des distances un peu moins faibles, et constituent ainsi les forces de cohésion qui, dans les solides, résistent à l'écartement des parties ou s'opposent à la rupture.

Les forces attractives, s'exerçant à des distances moins petites et étant, par suite, en nombre beaucoup plus grand, sont individuellement moins intenses que les forces répulsives, auxquelles elles font, par exemple, équilibre, à travers tout élément plan, dans un solide non tiré ni comprimé, ou dans un liquide peu volatil placé sous le récipient d'une machine pneumatique (1).

D'ailleurs, l'action mutuelle $\frac{d\Psi_2}{dr}$ de deux molécules voisines, fonction de leur distance r, ne dépend en outre, *tout au plus,* que des distances à celles-là, ou entre elles, des autres molécules contenues dans une sphère de rayon ρ, entourant les masses agissantes considérées et décrite autour du milieu de leur droite r de jonction; car les phénomènes physiques produits quelque part, dans toute petite région comme une telle sphère, et concernant la configuration de la matière qui s'y trouve, sont indépendants de ce qui se passe ailleurs (2).

Cela posé, divisons le corps, par une triple famille de surfaces ou autrement, en *éléments de volume* $d\varpi$, de dimensions *très supérieures* au rayon d'activité ρ des actions moléculaires. Dans ces éléments de volume, nous aurons à considérer séparément la matière située à leur surface, ou *couche superficielle,* à laquelle nous attribuerons l'épaisseur ρ, et la matière *intérieure,* d'une masse incomparablement plus grande, qui remplira les sortes d'alvéoles formés par l'ensemble des couches superficielles. Si

(1) On peut voir, au sujet de ces diverses actions et des phénomènes qu'elles expliquent, la quatrième de mes *Leçons synthétiques de Mécanique générale,* p. 41 à 50, etc.

(2) On voit que nous appelons ρ le plus grand des *rayons d'activité,* quand il y a lieu d'en considérer de plusieurs sortes : les autres peuvent être remplacés par celui-là sans inconvénient, du moins dans nos raisonnements théoriques.

Digitized by Google

nous ne poussons pas trop loin la division, il est clair, vu l'extrême petitesse du rayon d'activité, que la matière, d'épaisseur totale 2ρ, employée aux cloisons ou formant les parois des alvéoles, sera, pour le volume et le nombre des molécules, tout à fait négligeable *par rapport à la matière intérieure*. Par suite, dans l'expression $-d\Psi_2$ du travail des actions moléculaires, pour une petite déformation qui accroîtra de dr, dr', dr'', ... les imperceptibles droites de jonction r, r', r'', ... des points matériels du corps, il sera permis de négliger les actions entre molécules d'une même cloison ou paroi double et même, au besoin, entre ces molécules et les molécules intérieures de l'un quelconque des deux alvéoles $d\varpi$ adjacents (1).

Or, alors, il n'entrera plus en ligne de compte que des actions intérieures à chaque élément de volume et non influencées par la présence des éléments de volume voisins, forces ayant les mêmes travaux que si ces éléments de volume étaient éloignés les uns des autres ou sans actions mutuelles. Donc, pour le changement élémentaire considéré de la configuration interne du corps, la différentielle totale de l'énergie potentielle, Ψ_2, dépendant des imperceptibles distances intermoléculaires r, r', r'', ... aura l'expression $\sum d\Psi_2$, où, sous le signe de sommation $\sum$, la différentielle $d\Psi_2$ se rapporte à la matière *seule* de chaque élément de volume $d\varpi$ composant le corps, supposée subir loin de la matière environnante son changement interne effectif, et où la somme $\sum$ s'étend à tous les éléments de volume. D'ailleurs, on pourra, si l'on veut, faire entrer dans la différentielle $d\Psi_2$, relative à chaque particule ainsi isolée, les termes exprimant les travaux d'actions de sa couche superficielle qu'on en avait exclus; car ces travaux sont négligeables dans l'hypothèse d'un complet isolement de la par-

(1) Notre raisonnement ne demandera de négliger ainsi ces dernières actions, exercées entre la couche la moins profonde de la matière intérieure d'un élément de volume et la couche superficielle du même élément, qu'autant qu'elles seront influencées ou modifiées par la présence de la couche superficielle des éléments de volume contigus : notre but est de garder uniquement des couples d'actions moléculaires appartenant, chacun, à un seul élément de volume, et ne dépendant que de l'état physique de cet élément.

Digitized by Google

ticule, non moins que dans toute autre hypothèse concernant ses relations extérieures.

Et si le corps total éprouve successivement des changements élémentaires de configuration constituant en tout, à partir d'un état primitif fixe ou donné, un changement fini quelconque, mais avec permanence des rapports de voisinage entre toutes les molécules, ou sans échange de matière entre particules juxtaposées (d'ailleurs variables individuellement de grandeur et de forme), on pourra opérer la division du corps de manière à avoir pour éléments de volume, dans tous les états successifs, ces mêmes particules matérielles, à chacune desquelles se rapportera un terme des sommes $\sum$. Alors la variation totale de Ψ_2 sera évidemment $\sum \int d\Psi_2 = \sum \Psi_2 + \text{const.}$, où sous le signe $\sum$, chaque terme Ψ_2 ne se rapporte qu'à la particule correspondante. Pour éviter toute confusion, nous désignerons par ψ ces Ψ_2 partiels : nous écrirons donc $\sum \psi + \text{const.}$ la variation totale de Ψ_2.

Autrement dit, à une constante près (sans importance ici), *la partie de l'énergie potentielle qui dépend des imperceptibles distances intermoléculaires, s'exprime par simple addition des valeurs qu'elle a dans les divers éléments de volume du corps, considérés séparément.* Aussi l'appelle-t-on l'*énergie potentielle interne,* pour indiquer qu'elle est propre ou intérieure aux éléments de volume matériels $d\varpi$, et indépendante de leurs rapports, contrairement à l'*énergie potentielle de pesanteur,* fonction de leurs distances mutuelles et, par conséquent, extérieure à chacun d'eux.

La même loi s'étend au cas où les particules contiguës échangeraient peu à peu entre elles leur matière en conservant à peu près même composition; car la substitution, à toute molécule, d'une autre similaire, dans une particule, ne change rien à l'énergie potentielle de celle-ci. Sans doute, on néglige de la sorte à tout instant, dans $d\Psi_2$, le travail (de signes divers) dépendant des molécules *actuellement en voie de migration.* Mais le nombre relatif de ces molécules est supposé sans cesse assez restreint pour qu'il n'en résulte pas une altération notable de Ψ_2.

On voit toutefois que la dénomination d'*interne,* appliquée à la

Digitized by Google

partie de l'énergie potentielle qui dépend des imperceptibles distances entre molécules, cesserait d'être justifiée, si l'on poussait la division de la matière jusqu'à donner aux éléments de volume des dimensions seulement comparables au rayon d'activité ρ des actions physiques.

14. Dédoublement de l'énergie potentielle interne en énergie purement élastique et en chaleur potentielle. — Nous allons voir maintenant que l'énergie potentielle interne d'un élément de volume se dédouble elle-même en deux parties, par le fait de l'agitation calorifique, qui, dans chaque état observable où les molécules ont certaines situations moyennes (x, y, z), leur imprime d'imperceptibles et rapides déplacements ξ, η, ζ autour de (x, y, z).

Si l'on appelle ι, ι', ι'', ... les droites de jonction des molécules voisines supposées être dans ces situations moyennes, et $\Delta\iota$, $\Delta\iota'$, $\Delta\iota''$, ... les excédents, sur ι, ι', ι'', ... des vraies distances r, r', r'', ... des molécules à l'époque t, excédents dus aux vibrations calorifiques et de l'ordre de leurs amplitudes, l'énergie potentielle interne d'une particule, ayant une expression de la forme $\psi(r, r', r'', \ldots)$, s'écrira $\psi(\iota + \Delta\iota, \iota' + \Delta\iota', \iota'' + \Delta\iota'', \ldots)$. Elle se composera donc : 1° de la valeur $\psi(\iota, \iota', \iota'', \ldots)$ qu'elle aurait si, *pour* mêmes situations moyennes des molécules ou pour la *même configuration visible de la particule,* l'agitation calorifique était nulle; 2° d'une partie dépendant de l'agitation calorifique et dont le développement par la série de Taylor, supposé possible pour fixer les idées, serait

$$\frac{d\psi}{d\iota}\Delta\iota + \frac{d\psi}{d\iota'}\Delta\iota' + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\psi}{d\iota^2}\Delta\iota^2 + \ldots + 2\frac{d^2\psi}{d\iota\, d\iota'}\Delta\iota\,\Delta\iota' + \ldots\right) + \ldots.$$

Il semble, à première vue, que cette dernière partie devrait être négligeable, à raison tant de l'extrême petitesse que de l'irrégularité des déplacements ξ, η, ζ. D'abord, la petitesse dont il s'agit rend, ce semble, les $\Delta\iota$, $\Delta\iota'$, ... très faibles comparativement à ι, ι', ..., de manière à permettre la réduction des développements aux termes du premier degré en $\Delta\iota$, $\Delta\iota'$, ...; et, ensuite, l'irrégularité des déplacements fait neutraliser à très peu près les termes où les $\Delta\iota$, $\Delta\iota'$, ... sont positifs par ceux où ils sont négatifs.

Digitized by Google

Mais, en y regardant de près, l'on s'aperçoit que ces raisons sont en défaut pour les variables $\iota + \Delta\iota$, $\iota' + \Delta\iota'$, ... les plus petites et sans doute *les plus influentes malgré leur petit nombre relatif,* celles qui expriment les distances des molécules presque contiguës et dont les actions mutuelles sont de beaucoup les plus fortes. Car, d'une part, vu les grandes différences de phase de l'agitation calorifique entre points voisins, les variations $\Delta\iota$, $\Delta\iota'$, ... y sont probablement comparables à ι, ι', ... et produisent d'énormes changements des actions moléculaires correspondantes. D'autre part, ceux-ci sont beaucoup plus forts, à égalité des valeurs absolues de $\Delta\iota$, $\Delta\iota'$, ... quand $\Delta\iota$, $\Delta\iota'$, ... sont négatifs que lorsqu'ils sont positifs, les répulsions s'accroissant, en général, beaucoup plus vite par les rapprochements, qu'elles ne décroissent par les écartements, ou que ne grandissent les attractions par ces écartements (dans les cas où ceux-ci les font grandir).

L'énergie potentielle interne aura donc, comme l'énergie actuelle, une seconde partie dépendant de l'agitation calorifique. Quant à la première partie $\psi(\iota, \iota', \ldots)$, elle n'en dépendra qu'indirectement, par suite, comme on verra, de pressions intérieures dues à la chaleur et qui, influant, quand elles ne sont pas neutralisées par d'égales pressions extérieures, sur les dimensions de chaque particule, changent les situations moyennes (x, y, z) et leurs distances mutuelles ι, ι', ι'', ...

Cette première partie, fonction des distances ι, ι', ι'', ... et liée par conséquent à la configuration *visible* des particules, comme l'énergie de tension dans un ressort bandé, peut être appelée l'*énergie élastique,* ou mieux encore l'*énergie purement élastique;* car la tension et, par suite, l'énergie élastique d'un ressort à la température ordinaire comprennent, comme il vient d'être dit, des termes notables dus à la chaleur.

Au reste, dans les solides dont nous aurons à étudier ici l'échauffement ou le refroidissement loin de leurs points de fusion et entre des limites assez peu écartées, ces distances ι, ι', ι'', ... des situations *moyennes* varieront seulement, même les plus petites, de minimes fractions de leurs valeurs; en sorte que les changements correspondants de ψ seront négligeables à côté de ceux qu'éprouvera la seconde partie. Nous n'aurons donc guère à considérer que celle-ci.

Digitized by Google

Pour exprimer tout à la fois que son existence dans un corps tient à la chaleur sensible du corps, mais qu'elle est cependant de l'énergie potentielle et non actuelle, nous l'appellerons la *chaleur potentielle* du corps. Comme l'énergie potentielle interne, dont elle constituera la partie principale, elle recevra évidemment pour valeur, dans tout un corps, la somme des valeurs qu'elle aurait séparément dans les diverses particules du corps. En d'autres termes, on pourra la rapporter, de même que la chaleur sensible α, à l'unité du volume actuel $d\varpi$ des particules. Si l'on appelle ainsi β sa valeur, au point (x, y, z) et à l'époque t, par unité de volume, d'une part, β sera, comme α, une fonction de x, y, z, t, graduellement variable, en général, dans tout un corps, d'autre part, la chaleur potentielle d'un élément de volume $d\varpi$ et celle de tout un volume fini ϖ seront respectivement $\beta\, d\varpi$ et $\int_\varpi \beta\, d\varpi$.

15. Premier membre de l'équation des forces vives : chaleur totale. — En résumé, les mouvements visibles seront assez réduits, dans les phénomènes que nous aurons à étudier, pour que les deux énergies en jeu, c'est-à-dire variables, tant actuelle que potentielle, ne comprennent à très peu près que leurs parties calorifiques, *chaleur sensible* et *chaleur potentielle*, α et β par unité de volume.

Leur somme, énergie totale qu'il nous suffira de considérer, s'appellera naturellement la *chaleur totale*. Nous la désignerons, pour l'unité de volume, par γ. Nous poserons donc $\gamma = \alpha + \beta$; et le premier membre de l'équation (1) des forces vives, pour l'agrégat de particules constituant un volume total ϖ, sera la différentielle de sa chaleur totale $\int_\varpi \gamma\, d\varpi$, savoir

$$d\int_\varpi \gamma\, d\varpi,$$

cette différentielle signifiant la variation de l'intégrale durant un instant dt.

16. Travail extérieur : il comprend d'abord le travail des pressions subies par la surface. — Essayons maintenant d'évaluer le second membre de la même équation, c'est-à-dire le travail

Digitized by Google

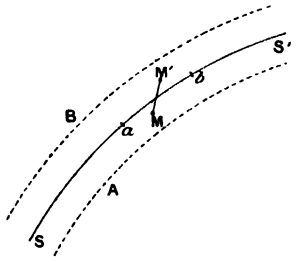
élémentaire $d\tau_e$ des forces extérieures appliquées à l'agrégat ϖ.

Il y aurait d'abord les actions de pesanteur, indépendantes des imperceptibles déplacements calorifiques dont il sera question. Mais leurs travaux, produits durant l'instant dt sur toute particule $d\varpi$, resteront négligeables, malgré la vivacité du mouvement calorifique, à raison de ce qu'il s'effectue dans toutes les directions et laisse immobile le centre de gravité de l'élément.

Restent les actions intermoléculaires ou *physiques,* exercées, aux distances imperceptibles, à travers la surface SS′ du corps ϖ considéré. Leur travail comprend en général deux parties : l'une correspond au mouvement visible de cette surface apparente continue, ou de la couche superficielle SAS′ du corps, idéalement taillée, sous SS′, d'une épaisseur égale au rayon d'activité ρ; l'autre correspond au mouvement calorifique ou invisible des molécules qui composent la même couche.

Soient, en effet, M l'une de ces molécules et M′ une molécule voi-

Fig. 1.



sine appartenant à la couche contiguë extérieure SBS′, d'épaisseur ρ comme SAS′ (¹). Soient, de plus, X, Y, Z les composantes de l'action de M′ sur M, et $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ les coordonnées de M, x, y, z désignant celles de la situation moyenne ou apparente de cette molécule M, et ξ, η, ζ les composantes de son rapide mais imperceptible déplacement calorifique. Nous aurons à consi-

(¹) Rien ici, dans nos raisonnements, ne suppose la matière extérieure d'une nature autre que celle du corps. Nous pouvons, par exemple, imaginer qu'une surface fermée S découpe dans une masse matérielle uniforme un certain volume ϖ. Ce que nous appelons *milieu extérieur* ou *milieu ambiant* sera constitué par les molécules situées en dehors de S, le corps étant formé par les molécules contenues dans le volume ϖ.

Digitized by Google

dérer toutes les actions comme celle-là et à évaluer leur travail élémentaire ou travail durant l'instant dt. Pour procéder méthodiquement, nous diviserons l'aire SS′ en parties très petites, comme ab par exemple, dites *éléments plans,* d'assez faibles dimensions pour que le mouvement visible ou moyen de la matière voisine soit le même dans toute leur étendue; et nous évaluerons le travail des actions physiques *correspondant à l'élément plan quelconque ab*, c'est-à-dire exercées *entre molécules dont la droite de jonction,* comme MM′, *perce cet élément plan.* Le travail de l'action de M′ sur M étant évidemment

$$\begin{aligned} &X\,d(x+\xi)+Y\,d(y+\eta)+Z\,d(z+\zeta)\\ &\quad=(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)+(X\,d\xi+Y\,d\eta+Z\,d\zeta), \end{aligned}$$

la somme des travaux analogues produits, *à travers l'élément plan ab*, sur le corps SAS′, sera

$$[(\Sigma X)\,dx+(\Sigma Y)\,dy+(\Sigma Z)\,dz]+\Sigma(X\,d\xi+Y\,d\eta+Z\,d\zeta),$$

vu que les composantes dx, dy, dz du déplacement apparent ou moyen ont à très peu près les mêmes valeurs pour toutes les molécules dont l'éloignement de ab n'excède pas ρ, les seules soumises aux actions qu'il s'agit de considérer.

Dans la première partie de cette expression, les trois sommes ΣX, ΣY, ΣZ sont celles des composantes, suivant les trois axes respectifs, de toutes les actions physiques exercées à travers ab sur le corps : elles expriment les trois composantes analogues de la résultante que donneraient toutes ces forces, si on les appliquait à un même point. Or, une pareille résultante est dite la *pression* exercée sur l'élément plan ab, quand on choisit pour ce point fictif d'application le centre de gravité de l'élément plan *supposé matériel,* c'est-à-dire du *feuillet* de matière recouvrant actuellement ab. Et comme le *centre* dont il s'agit possède seulement le mouvement moyen ou visible de la matière ambiante (vu que l'agitation calorifique est de sens inverses pour divers points matériels du feuillet ab), les composantes dx, dy, dz du déplacement visible sont justement celles du point d'application de la pression. Ainsi, la première partie du travail extérieur $d\mathfrak{T}_e$ qu'il s'agit d'évaluer est *le travail produit, dans le mouvement visible du corps, par les actions physiques exercées à sa sur-*

Digitized by Google

face; et elle *se trouve exactement représentée par le travail même des pressions qui sont censées totaliser toutes ces actions.*

17. Le travail extérieur comprend encore les flux de chaleur entrés dans le corps. — Quant à l'autre partie

$$\Sigma(X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta),$$

elle constitue évidemment le travail des mêmes actions physiques, dans le mouvement calorifique, très vif, quoique imperceptible. Les termes ne s'y détruiront pas, malgré les signes divers qu'y recevront les facteurs $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$; car les autres facteurs, X, Y, Z, y éprouveront d'énormes variations ayant leurs signes en partie solidaires de ceux-là, du moins quand il s'agira des actions X, Y, Z prépondérantes, exercées aux plus petites distances intermoléculaires.

Cette partie de $d\mathfrak{T}_e$, très importante, étant due à la chaleur sensible possédée par le corps, il sera naturel de l'exprimer en calories, plutôt qu'en kilogrammètres, ou de la considérer comme de la chaleur, puisqu'elle serait nulle sans l'agitation calorifique. Et comme le corps la devra aux actions exercées (pour ainsi dire, d'infiniment près) à travers les divers éléments plans de sa surface, nous l'appellerons le *flux de chaleur* entré durant l'instant *dt par cette surface,* ou mieux par ses éléments respectifs.

La propagation de la chaleur dans les solides, que nous aurons à étudier, ne donne lieu, en fait de mouvements visibles ou moyens, qu'à des déplacements très faibles où les différentielles dx, dy, dz et, par suite, le travail des pressions seront complètement négligeables. Le travail extérieur $d\mathfrak{T}_e$ s'y réduira donc aux flux dont il s'agit.

Et, si nous appelons dJ leur somme, l'équation des forces vives sera simplement

$$d\int_{\varpi}\gamma\,d\varpi = dJ.$$

Elle exprime que la chaleur totale d'un solide à l'état naturel ou en repos (apparent) s'accroît, d'un instant à l'autre, des flux de chaleur qui y pénètrent par les divers éléments plans de sa surface.

Digitized by Google

18. Égalité absolue, avec signes contraires, des deux flux traversant en sens opposés un même élément plan. — Considérons encore, sur les deux faces (p. 24) de la superficie SS′ ou d'une petite partie finie quelconque de celle-ci, les deux couches matérielles très minces SAS′, SBS′, l'une intérieure au corps proposé ϖ, l'autre extérieure, ou appartenant à un corps contigu ϖ', et aussi, d'une part, les actions de SBS′ sur SAS′, d'autre part, les réactions égales et contraires de SAS′ sur SBS′. Soient $d\mathfrak{T}$ le travail total, pour un instant dt, des premières de ces forces, $d\mathfrak{T}'$ celui des secondes. Leur somme $d\mathfrak{T} + d\mathfrak{T}'$, travail des actions mutuelles des deux couches, sera la différentielle, changée de signe, de l'énergie potentielle interne Ψ_2 du système des deux corps contigus, par rapport à toutes les imperceptibles droites r, r', r'', ... joignant à travers SS′ les molécules des deux couches. Or la quantité de matière de celles-ci est absolument insensible comparativement à celle des deux corps ou même d'un simple élément de volume; en sorte que le nombre des droites considérées de jonction est comme rien par rapport au nombre des droites analogues existant dans un volume fini du corps ϖ, et, par suite, la différentielle correspondante de Ψ_2, aussi comme rien par rapport à la différentielle totale de l'énergie potentielle interne, que j'appellerai ψ, relative à un tel volume (¹).

Ainsi la somme $d\mathfrak{T} + d\mathfrak{T}'$ peut être négligée en comparaison

(¹) Ce raisonnement suppose la différentielle totale $d\psi$ du même ordre que la somme absolue de ses éléments, malgré les signes divers de ceux-ci. Il n'y a, en effet, aucune probabilité à ce qu'elle soit d'un ordre de petitesse supérieur. Dans une particule solide à l'état naturel, c'est-à-dire soustraite à toute pression, les molécules se disposent, il est vrai, de manière que les attractions et les répulsions se neutralisent à travers un élément plan quelconque; ce qui annule le travail extérieur relatif au mouvement visible. Si une petite déformation, qu'on y produirait sans vitesses sensibles, était censée pouvoir s'y faire *en l'absence de toute agitation calorifique,* la variation correspondante de son énergie totale s'y réduirait à $d\psi$ et, d'autre part, $d\mathfrak{T}_e$ s'y annulant, l'équation des forces vives donnerait $d\psi = 0$. Donc la différentielle $d\psi$ serait, comme les pressions, d'un ordre de petitesse plus élevé que la somme absolue de ses termes. Mais il n'y a aucune raison pour que pareille neutralisation des termes de $d\psi$ se produise dès qu'on tient compte de l'agitation calorifique.

D'ailleurs, dans l'hypothèse de déformations s'effectuant sans être accompagnées de cette agitation, les deux flux de chaleur, compris dans $d\mathfrak{T}$ et $d\mathfrak{T}'$, que nous nous proposons ici de comparer, seraient identiquement nuls; et il n'y aurait plus lieu de chercher leur rapport.

Digitized by Google

de $d\psi$ ou, *a fortiori,* en comparaison de la différentielle de l'énergie calorifique totale $\int_{\varpi} \gamma\, d\varpi$ du corps ϖ. Or, au contraire, chacune des deux sommes $d\mathfrak{T}$, $d\mathfrak{T}'$ de travaux, comparable au flux total dJ, est, d'après l'équation ci-dessus des forces vives, de l'ordre de $d\int_{\varpi} \gamma\, d\varpi$. Donc $d\mathfrak{T}$, $d\mathfrak{T}'$ ont leur somme algébrique négligeable en comparaison d'eux-mêmes; et chacune de ces quantités peut être regardée comme égale et contraire à l'autre.

Autrement dit, *si l'on considère les deux portions contiguës de matière que sépare une surface quelconque, le travail des actions intermoléculaires de l'une sur l'autre est, à chaque instant, égal et contraire au travail des réactions de celle-ci sur la première.*

Retranchons maintenant de chacun de ces deux travaux égaux sa partie relative au mouvement visible, c'est-à-dire, pour chaque élément plan, le travail que produisent, dans le mouvement de son centre de gravité, les deux pressions égales et contraires supportées par ses deux faces. Il est clair que les restes, flux de chaleur passés dans les deux sens contraires à travers la surface, seront eux-mêmes égaux.

En d'autres termes, *la chaleur gagnée par un corps, à travers une partie quelconque de sa surface, est perdue par la matière extérieure contiguë, et* vice versa.

C'est surtout cette circonstance qui a permis d'assimiler le calorique à une matière, à un fluide, pouvant passer d'un corps à un autre sans augmentation ni diminution de substance, et élevant la température quelque part, ou l'y abaissant, suivant qu'elle s'y accumule ou s'y raréfie. Si, en effet, la chaleur avait pu s'accroître dans un élément de volume, par le fait de la présence d'un élément voisin, sans diminuer d'autant dans celui-ci par le fait de la présence du premier, un simple échange de calorique entre eux n'aurait pas pu figurer ce phénomène; et l'hypothèse de la matérialité du calorique, c'est-à-dire l'assimilation du calorique à une substance, ne serait probablement jamais venue à l'esprit.

Digitized by Google

TROISIÈME LEÇON.

DE LA CHALEUR, CONSIDÉRÉE D'ABORD A L'ÉTAT DE MOUVEMENT ONDULATOIRE BIEN CONTINU, DANS L'ÉTHER DES ESPACES INTERPLANÉTAIRES.

19. Vibrations lumineuses et calorifiques dans l'éther libre. — Pour nous rendre compte de ce que peut être ce mouvement moléculaire, invisible et très rapide, qui constitue l'agitation calorifique, nous devrons faire appel aux analogies que nous offriront d'autres phénomènes physiques, plus simples ou mieux analysables dans leurs détails, mais surtout celui-là même qui, le plus souvent, lui donne naissance et en dérive, savoir, le phénomène de la lumière ou de la chaleur rayonnante, considéré d'abord dans l'éther libre, comme est l'éther du vide interplanétaire ou interstellaire.

On sait que la chaleur rayonnante émanée d'un corps et propagée dans l'espace est tout à fait analogue à la lumière ou, pour mieux dire, qu'elle comprend celle-ci comme cas particulier, à titre de variété produisant sur notre rétine la sensation spéciale dite *lumineuse*. Et l'on sait aussi comment l'une et l'autre s'expliquent par les vibrations à très courte période de l'*éther*, milieu élastique, extrêmement ténu et raréfié, remplissant l'espace interstellaire. Ces vibrations complexes se décomposent en mouvements plus simples, sensiblement pendulaires, caractérisés respectivement par leur période τ, et dont chaque système se produit et se propage comme s'il était seul.

Dans l'un quelconque d'entre eux ainsi considéré à part, les atomes de l'éther sont comme groupés en couches très minces et parallèles, de faible courbure, appelées *surfaces d'onde*, dont

Digitized by Google

tous les points se meuvent *synchroniquement,* c'est-à-dire arrivent ensemble à une même *phase* quelconque de leur course (comme le commencement, le milieu, la fin, etc.) et, de plus, oscillent à peu près parallèlement et également, sur de grandes étendues, de dimensions presque comparables aux rayons de courbure des couches. Au contraire, le mouvement diffère de phase, sur deux couches, d'autant plus qu'elles sont moins voisines; et l'on appelle *longueur d'onde* la distance constante λ de deux couches sur lesquelles il diffère d'une période entière, ou entre lesquelles la phase reçoit une fois, sur les couches intermédiaires, chacune de ses valeurs, distance presque nulle, le plus souvent, par rapport aux rayons de courbure des couches. Enfin, chaque phase se transmet d'une couche à la suivante suivant leur normale commune, avec une *célérité* ou vitesse de propagation ω constante; et une *onde complète* est constituée par le fluide, toujours nouveau à l'avant, compris entre deux surfaces coïncidant sans cesse avec des surfaces d'onde et distantes de λ, mais animées de cette vitesse de propagation ω; en sorte que toutes les phases, et sans cesse les mêmes, s'observent sur les surfaces parallèles intermédiaires animées de la même vitesse.

La vitesse ω, dans l'éther libre ou éther du vide, est d'environ $300\,000^{km}$ par seconde; et la longueur λ, pour des radiations lumineuses de période moyenne, est d'environ un demi-millième de millimètre. La phase redevenant la même en chaque endroit quand une onde complète y a passé, c'est-à-dire dans le temps $\frac{\lambda}{\omega}$ employé à lui faire parcourir sa propre épaisseur λ, la durée correspondante τ de la vibration égale précisément ce temps, c'est-à-dire, en secondes, le quotient de 1 demi-millième de millimètre par $300\,000^{km}$, ou la fraction quasi-infinitésimale $\frac{1}{6.10^{14}}$, de l'ordre de $\frac{1}{1000^5}$, ou comparable à 1 quatrillionième.

On sait de plus, depuis Fresnel, que les vibrations sont *transversales,* ou s'effectuent à fort peu près dans les plans tangents aux ondes, perpendiculairement au sens de la propagation.

20. Fluidité de l'éther pour les déformations ou grandes ou lentes, et sa rigidité, ou résistance aux déformations, pour celles qui sont assez faibles et assez multipliées. — Il est impossible de

Digitized by Google

ne pas admettre, dans les espaces interstellaires et jusque dans les corps, un éther matériel, capable de transmettre les *radiations* dont il vient d'être parlé et que nous envoient effectivement les corps célestes lumineux ou chauds, sous la forme ondulatoire que nous avons décrite ou sous quelque autre équivalente. Mais les caractères de cette transmission, joints à l'absence de toute résistance *appréciable* de ce milieu au mouvement des astres, obligent de lui attribuer des propriétés presque contradictoires en apparence, qui le différencient profondément des corps directement perceptibles à nos sens, dits *pondérables* (à cause de leur gravitation). Il est nécessaire de nous expliquer ces propriétés, ou tout au moins d'en atténuer la forme paradoxale, pour dégager quelques données, qui nous seront indispensables, sur la nature probable d'un si étrange milieu.

Et, tout d'abord, l'éther, comme il vient d'être dit, n'oppose au mouvement des corps célestes qu'une résistance extrêmement faible, que les observations les plus précises sur les planètes n'ont pu même faire soupçonner. Les seuls phénomènes astronomiques qui aient *paru* en manifester l'existence sont relatifs à certaines comètes, corps beaucoup moins denses que les planètes et sur lesquels une minime résistance aurait, par suite, bien plus de prise. L'éther se comporte donc, par rapport aux corps palpables qui y sont plongés, comme le ferait un fluide d'une densité presque nulle et d'une mobilité incomparablement plus grande que celle de l'air.

Mais, s'il en est ainsi, comment l'éther pourra-t-il transmettre des vibrations transversales que n'accompagne aucun changement appréciable de la densité? Les fluides, en effet, doués seulement de l'élasticité *de volume*, ou ne résistant à la manière d'un ressort tendu qu'aux changements de densité, sont tout à fait impropres à la production et à la propagation des vibrations transversales. Aussi les seules ondes sonores qu'on y constate sont des ondes à vibrations *longitudinales*, accompagnées de condensations et de dilatations (cubiques) alternatives. L'élasticité de *forme* qui, du moins à l'état statique, se trouve seulement dans les solides, est nécessaire pour la transmission, de proche en proche, des vibrations transversales.

La manière dont l'éther se comporte à l'égard des corps qui le

Digitized by Google

traversent semble donc être en contradiction avec sa propriété de vibrer transversalement sous l'impulsion des particules chaudes ou lumineuses.

Heureusement, l'anomalie s'explique par l'excessive brièveté des vibrations dont il s'agit, qui se succèdent au nombre de près d'un quatrillion par seconde.

Il n'y a, en effet, de fluide parfait qu'à l'état de repos. C'est la parité de constitution en tous sens qui produit, dans les particules où elle existe, la normalité et l'égalité des pressions, c'est-à-dire la *fluidité*. Donc, toute déformation qui survient détruit celle-ci. Les liquides et les gaz en mouvement jouissent, il est vrai, de la merveilleuse propriété de reconstituer sans cesse, d'eux-mêmes, avec plus ou moins de promptitude, la parité de constitution à l'intérieur de leurs éléments de volume, grâce à une évolution imperceptible et appropriée des molécules les unes autour des autres; et c'est justement en cela qu'ils se distinguent des solides isotropes, dont la parité de constitution en tous sens n'existe qu'à l'état naturel, ou en l'absence des déformations. Mais l'évolution interne qui y rétablit ainsi la fluidité exige un certain temps pour se faire (¹).

Aussi, dès qu'un liquide ou un gaz est agité, il s'y développe des pressions obliques, comme dans un solide isotrope que l'on déformerait. Et la fluidité s'efface d'autant plus qu'on rend moins possible, par un renversement plus *fréquent* des vitesses de déformation, l'établissement, dans chaque particule, d'un état moléculaire se rapprochant de la permanence. Si, enfin, les déformations en sens inverse se succèdent à d'assez courts intervalles, pour que l'évolution égalisant les distances intermoléculaires dans les divers sens soit sans cesse à peine ébauchée, les actions mutuelles des molécules y seront précisément celles qui ont lieu dans un solide élastique isotrope; et elles donneront les équations de mouvement propres à un tel solide.

Il est donc naturel que l'éther, tout en étant le moins imparfait et le moins résistant des fluides réels, se comporte comme un so-

---

(¹) On peut voir, à ce sujet, la théorie de la fluidité exposée aux pages 51 à 59 de mon étude *Sur l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section* (Gauthier-Villars, Paris, 1897).

Digitized by Google

lide isotrope, déformé entre ses limites d'élasticité, quand ses particules effectuent plus d'un trillion d'imperceptibles vibrations par seconde. Ainsi, solide élastique dans la transmission des ondes calorifiques et lumineuses, à vibrations transversales assez étroites pour ne solliciter cette élasticité qu'à un degré extrêmement petit, il devient le fluide le plus facile à diviser, bien avant sans doute que ses forces élastiques nous soient appréciables, c'est-à-dire dès que la grandeur des déformations le fait sortir de ses très étroites limites d'élasticité, et surtout dès que leur lenteur relative laisse à la parité de constitution en tous sens le temps de se rétablir dans ses particules, comme il arrive chez les fluides gazeux ou liquides qui nous sont plus connus.

21. Excessive petitesse de la densité de l'éther. — L'éther présente encore deux particularités qui, pour un corps ordinaire, seraient presque contradictoires, savoir, d'une part, son excessive raréfaction, sa faible masse par unité de volume, et, d'autre part, le nombre prodigieux de ses parties ou des points matériels qu'il offre dans les plus petits espaces : ce qui prouve, chez lui, un état de dilution ou de division de la matière dont les corps ordinaires ne nous donnent pas l'idée.

En effet, d'une part, la densité ρ de ce milieu est si faible que les phénomènes astronomiques s'y effectuent comme dans un vide parfait. Même sans sortir de la catégorie des faits calorifiques ou optiques qui nous occupe, voici comment nous pourrons, par quelques considérations très simples, apprécier cette excessive petitesse.

Imaginons que nous exposions au soleil, pendant seulement trois secondes, une plaque métallique de densité ρ', ayant 1^m carré de surface et 1^{mm} d'épaisseur, après avoir recouvert de noir de fumée la face qui recevra les radiations calorifiques et avoir poli l'autre face. Dans ces conditions, et vu, d'une part, la facilité connue d'absorption du noir de fumée, d'autre part, la difficulté d'émission d'un métal poli, on peut regarder comme certain que presque toute la chaleur arrivée sur la plaque y aura pénétré, et que presque toute cette chaleur ainsi entrée dans la plaque aura été employée à la chauffer, ou s'y trouvera contenue encore au bout des trois secondes. En effet, l'échauffement du métal sera peu sen-

Digitized by Google

sible, et la déperdition qui en résulte vers les espaces célestes ou terrestres aura été petite. Ainsi, la demi-force vive de ses molécules, créée par l'agitation calorifique venue du soleil, sera fort peu de chose comparativement à ce qu'elle pourrait devenir au bout d'un temps plus long : indice presque évident que la moyenne des vitesses vibratoires absolues des molécules métalliques, ou la moyenne des excursions calorifiques de ces molécules, seront d'assez petites fractions des moyennes analogues dans l'éther interposé entre la plaque et le soleil. En tout cas, elles ne les excéderont pas. Sans cela, en effet, ce seraient les molécules métalliques qui pousseraient l'éther et lui communiqueraient de leur mouvement plutôt que d'en recevoir de lui.

Or, pendant les trois secondes de temps qu'aura duré ce léger échauffement, les dernières ondes entrées dans la plaque auront cheminé à travers l'espace avec la vitesse $\omega = 300000^{km}$; et elles auront parcouru 900000^{km}, soit près de 10^6 kilomètres ou de 10^{12} millimètres. Elles seront ainsi venues de cette distance de la plaque, précédées par d'autres qui, au début des trois secondes, occupaient, toutes ensemble, entre la plaque et le soleil, une colonne de 1^m carré de base et environ 10^{12} millimètres de longueur. Toute l'énergie actuelle ou potentielle des ondes se transmettant sans absorption ni dissémination dans l'éther libre (dont la transparence est comme parfaite), et l'énergie actuelle ou demi-force vive étant, dans tous les milieux, une fraction notable de l'énergie totale d'un mouvement vibratoire, il s'ensuit que la demi-force vive acquise par la plaque est comparable à celle que possédait la colonne d'éther, 10^{12} fois plus volumineuse. En appelant v^2, v'^2 les carrés moyens des vitesses vibratoires de l'éther et de la matière de la plaque, on a donc, si $v_0'^2$ désigne la valeur de v'^2 au début de l'échauffement,

$$\rho' \frac{v'^2 - v_0'^2}{2} = \text{quantité comparable à } 10^{12} \rho \frac{v^2}{2}.$$

Et comme v'^2 est beaucoup plus petit que v^2, le rapport $\frac{\rho'}{\rho}$, comparable à $10^{12} \frac{v^2}{v'^2 - v_0'^2}$, excède considérablement 10^{12}.

Ainsi, la densité de l'éther, comparée à celle d'un métal, n'en

Digitized by Google

est seulement pas la fraction qu'exprime une unité décimale du douzième ordre.

22. Extrême division ou ténuité de l'éther, comparativement à celle de la matière pondérable. — Malgré cette densité extrêmement faible, qui porterait à lui attribuer peu de parties ou de molécules dans un espace restreint, l'éther renferme par unité de volume incomparablement plus de particules, se comportant comme des points matériels distincts, que n'importe quelle matière pondérable.

En effet, les mouvements ondulatoires ne peuvent se propager régulièrement (ce que font les radiations lumineuses dans l'éther libre) qu'autant que le milieu où ils se transmettent se comporte comme une masse déformable mais continue, c'est-à-dire ayant, sur le trajet d'un fragment quelconque d'onde, assez de molécules pour qu'il y en existe un grand nombre à toutes les phases de la vibration, entre deux surfaces d'onde distantes d'une longueur d'ondulation λ. Sans cela les différences relatives des déplacements entre molécules voisines, différences qui évaluent l'état de tension des couches, ne seraient pas exprimables par des dérivées partielles en x, y, z; et les équations du mouvement cesseraient d'être les équations homogènes aux dérivées partielles que supposent les lois simples de la Physique [1], pour devenir tout au plus des équations aux *différences mêlées,* à différences finies en x, y, z, peut-être réductibles, par la série de Taylor, à des développements contenant des dérivées partielles en x, y, z, mais de tous les ordres jusqu'à l'infini. Il existe donc dans le milieu éthéré, sur toute longueur comparable à λ, c'est-à-dire, par exemple, à un demi-millième de millimètre, des myriades de molécules ou, du moins, de points matériels similaires ayant leurs vibrations distinctes.

Mais il y a plus. Les mêmes raisonnements par lesquels on réduit les équations du mouvement ondulatoire d'un milieu à des équations homogènes, du second ordre relativement aux dérivées

---

[1] Il s'agit de l'homogénéité quant à l'ordre des dérivées qui figurent dans les équations du mouvement : ces dérivées, tant par rapport aux coordonnées que par rapport au temps, sont, en effet, du *second* ordre.

Digitized by Google

partielles en x, y, z comme aux dérivées par rapport au temps, supposent l'élasticité de ce milieu constituée par des actions dont le rayon d'activité soit également très petit vis-à-vis d'une longueur d'onde. Ainsi, ce ne sont pas seulement les intervalles séparant les molécules de l'éther qui se réduisent à des fractions extrêmement faibles d'une longueur d'onde lumineuse ou calorifique, mais aussi les distances auxquelles s'exercent leurs actions en jeu dans le mouvement vibratoire.

D'autre part, un fait plus délicat que celui de la simple propagation des ondes prouve qu'il n'en est pas de même, et à beaucoup près, de la matière pondérable. C'est le fait de la *dispersion* des rayons diversement colorés, mis en évidence par le prisme, et qui tient à la variabilité de la vitesse de propagation ω avec la période τ des mouvements ou avec la longueur d'onde λ. Il se produit dans tous les milieux transparents autres que l'éther libre, c'est-à-dire dans tous ceux où l'éther se trouve parsemé de molécules pondérables. Or, pour expliquer cette variabilité de ω en fonction de τ, il a fallu admettre, dans tout élément de volume à dimensions très petites vis-à-vis d'une longueur d'onde, l'existence d'un nombre trop restreint de molécules pondérables pour que leur répartition pût être supposée, en moyenne, pareille dans tous les éléments de volume voisins. Ou, ce qui revient au même, si l'on veut obtenir, dans les corps transparents, de petits volumes constitués de même à côté les uns des autres, et propres à servir d'éléments de volume dans l'établissement d'équations de mouvement à coefficients constants (ou convenant à un corps homogène), force est d'attribuer à ces volumes des dimensions un peu comparables à la longueur d'onde λ, assez pour ne pas permettre d'assimiler tout à fait à des différentielles en x, y, z les variations des déplacements vibratoires ou de leurs dérivées partielles, d'une face à la face opposée. Ces variations sont, dès lors, des différences finies, dont le développement par la série de Taylor introduit dans les équations du mouvement des dérivées en x, y, z d'ordre supérieur à celui des différentielles auxquelles on aurait pu, sans cela, identifier les différences en question. Et c'est la non-homogénéité des équations ainsi obtenues qui entraîne justement la variabilité des vitesses de propagation ω, c'est-à-dire la dispersion.

Ainsi, l'intervalle des molécules et, à plus forte raison, le rayon

Digitized by Google

d'activité des actions moléculaires, sont, dans les corps pondérables, presque de l'ordre de grandeur d'une longueur d'onde lumineuse ou calorifique, alors que, dans l'éther libre, les intervalles et rayons d'activité analogues se comportent comme des infiniment petits. On doit donc supposer ceux-ci d'un ordre de petitesse bien supérieur; de sorte que, en particulier, le rayon d'activité des actions élastiques de l'éther est comme infiniment petit par rapport à la distance mutuelle de deux molécules pondérables voisines. Peut-être même est-il moindre que les dimensions d'une de ces molécules.

23. Hypothèses plausibles sur la constitution, atomique et non moléculaire, de l'éther. — Nous sommes ainsi amenés à nous représenter l'éther comme une poussière *atomique*, ayant ses éléments incomparablement plus petits et plus rapprochés que ne sont les molécules des corps pondérables.

Les actions mutuelles de ces *atomes* excèdent vraisemblablement, dans un rapport énorme, les forces intermoléculaires considérées dans la précédente leçon, eu égard, du moins, à la faiblesse des quantités de matière agissantes. Car les phénomènes *chimiques,* qui mettent précisément en jeu des actions de même nature ou exercées aux mêmes distances, donnent lieu aux transformations d'énergie ou aux productions de travail les plus grandes dont on ait exemple, malgré l'extrême petitesse des rapprochements ou écartements corrélatifs d'atomes qui y figurent comme facteur en même temps que ces actions. Mais, en revanche, le rayon d'activité de celles-ci autour de chaque atome doit être, comme on vient de voir, seulement comparable aux dimensions d'une molécule pondérable.

En effet, la limitation d'une telle molécule est due, probablement, aux répulsions *physiques* qui commencent à se manifester entre ses points matériels les plus éloignés, dès que son diamètre atteint une certaine grandeur, et qui, finissant par tenir en échec les attractions *chimiques* exercées aux distances moindres, rendraient la molécule instable, ou même en dissiperaient les éléments, si elle devenait plus grosse. Mais, quand elle se trouve réduite à un volume assez petit pour que ces répulsions physiques ne s'y manifestent pas, les énormes attractions chimiques subsis-

Digitized by Google

tant entre ses atomes la condensent, jusqu'à ce qu'elles soient neutralisées par les répulsions, indéfiniment croissantes avec le rapprochement, qui s'exercent aux plus petites distances interatomiques et assurent ou maintiennent l'impénétrabilité de la matière. Ainsi s'expliquerait l'existence des corps ordinaires, ou plutôt leur composition en molécules *isolées* très compactes.

Il faut une matière *infiniment* moins dense, en quelque sorte, que ces molécules, ou ayant ses atomes incomparablement plus clairsemés, pour que l'accroissement des intervalles interatomiques y affaiblisse les répulsions *chimiques* au point d'y rendre celles-ci insuffisantes à la neutralisation des attractions chimiques, à travers chaque élément plan, et susceptibles d'accepter pour cette neutralisation le concours entier des *répulsions physiques* sans entraîner l'explosion du système. Et alors on n'a plus un corps à molécules, mais cette poussière atomique, éparse dans l'étendue et sans limites précises, qui est l'*éther*.

Quoi qu'il en soit de ces considérations, l'impossibilité ou, du moins, la difficulté que l'on éprouve à faire réagir *chimiquement* des corps à l'état solide (fussent-ils fortement pressés les uns contre les autres), et souvent même les mélanges fluides, est un indice sûr de la petitesse du rayon d'activité des actions interatomiques ou chimiques, comparativement à celui des actions intermoléculaires ou physiques, quoique les premières, une fois mises en jeu par un rapprochement suffisant, soient incomparablement plus puissantes que les secondes.

Pour nous rendre compte de cette prodigieuse intensité des actions interatomiques, en même temps que de l'extrême rapprochement indispensable à leur manifestation, imaginons que l'on mélange à pression constante, dans l'obscurité, un litre de chlore et un litre d'hydrogène. Les molécules des deux espèces n'y sont pas plus distantes les unes des autres qu'elles ne l'étaient de leurs pareilles dans chacun des gaz, puisque le volume total s'est conservé; et les répulsions physiques ou intermoléculaires, auxquelles est due la tension du mélange, s'exercent pleinement entre elles. Chacune d'elles est donc, ou constamment, ou du moins à de fréquents intervalles, dans la sphère d'activité physique de ses voisines; et cependant elles s'ignorent totalement *au point de vue*

Digitized by Google

chimique, trop éloignées qu'elles sont les unes des autres pour que la force d'affinité s'y révèle.

Mais si un rayon de lumière, pénétrant dans le mélange, vient l'agiter et, par son ébranlement à période assez courte, disloque çà et là des molécules tant d'hydrogène que de chlore en les dilatant assez, leurs éléments se trouveront alors en présence intime : la combinaison a donc lieu, avec le dégagement énorme de travail et, par suite, de force vive que l'on sait. Or, une fois les nouvelles molécules d'acide chlorhydrique produites et le calme revenu par la dissipation, tout autour, de l'énergie sensible de l'explosion, le volume total est, comme on le sait aussi, le même que dans le mélange primitif. Les déplacements définitifs d'atomes *correspondant à la formation de l'acide* ont donc pu se réduire à de simples échanges de chlore et d'hydrogène entre molécules *déjà amenées, physiquement*, au *contact*, et puis (les échanges faits) remises de nouveau *physiquement* aux distances intermoléculaires primitives, avec production de travaux égaux et contraires à ceux des rapprochements, puisque, aux distances intermoléculaires, l'acide chlorhydrique est, quant aux actions mutuelles, l'équivalent, pour ainsi dire, exact soit du chlore, soit de l'hydrogène.

Le travail considérable de l'explosion n'a pu naître de si faibles changements de distance, entre atomes de molécules déjà amenées ainsi physiquement au contact, que si la grandeur des forces exercées en ce moment a été très supérieure à celle des actions physiques auxquelles est due, par exemple, la pression de deux gaz composants ou du gaz composé : car celle-ci, pour produire ses travaux, en général bien moindres, dispose de trajets ou de déplacements relatifs beaucoup plus grands, savoir, autant que l'est l'intervalle de deux molécules voisines par rapport à leurs dimensions.

En résumé, nous supposerons l'éther composé d'atomes ou points matériels presque sans masse (par unité de volume), assez petits et assez rapprochés pour qu'on puisse le considérer comme un fluide continu, dans ses rapports avec chacune des molécules incomparablement plus denses constituant les corps pondérables. Il baignera et entourera ces molécules comme l'air ou l'eau environnent et imprègnent les flotteurs qui y sont immergés. Ses atomes exerceront les uns sur les autres, dans des sphères d'activité

Digitized by Google

ayant leur rayon seulement comparable aux dimensions d'une molécule, des actions énergiques, attractives ou répulsives suivant la distance, capables d'imprimer à leur masse presque nulle des accélérations relativement considérables : ce qui expliquera l'énorme vitesse de propagation de la lumière et de la chaleur rayonnante.

24. De son mode d'action sur la matière pondérable et sur lui-même. — Un tel milieu possédera les propriétés suivantes.

1° Son action sur une molécule pondérable en repos ou en mouvement restera toujours peu sensible pour la mouvoir ou pour la retenir. En effet, les seuls atomes pouvant y contribuer par influence directe seront ceux qui touchent, pour ainsi dire, immédiatement la molécule. Or, d'une part, leur masse, insignifiante à côté de la sienne, rendra négligeable leur inertie ou force d'impulsion : ce qui impliquera leur équilibre continuel sous la double action de la résistance égale et contraire de la molécule et des efforts élastiques de l'éther ambiant. D'autre part, ces actions élastiques de l'éther ambiant ne pourront, à cause de l'excessive étroitesse des limites d'élasticité, atteindre la grandeur qu'il leur faudrait pour qu'elles pussent imprimer un mouvement notable à une masse relativement aussi lourde que la molécule considérée.

En particulier, la résistance de l'éther au mouvement continu ou *translatoire* des corps, fût-il rapide comme celui des astres, sera insignifiante. Dans ce cas, d'ailleurs, un régime sensiblement permanent de l'éther s'établira tant à l'intérieur qu'autour des corps, pendant leur déplacement, et les actions de l'éther, déjà très faibles, se neutraliseront en majeure partie, à l'avant et à l'arrière des molécules ([1]).

Il n'en sera plus de même lorsque les atomes d'éther exécuteront les imperceptibles mais vives oscillations lumineuses ou calorifiques, qui les laisseront presque partout entre leurs limites d'élasticité et, de plus, exagéreront les accélérations au point de

([1]) C'est ce qui arrive du moins, aux petites vitesses, dans un liquide *parfait* au sein duquel se meut un solide : celui-ci y éprouve une résistance proportionnelle à son accélération, et qui est, par conséquent, nulle dans le cas d'une translation uniforme. *Voir*, par exemple, le n° 6 de la grande Note I, au Tome II de cet Ouvrage.

Digitized by Google

rendre celles-ci bien plus influentes que les vitesses sur la résistance dont il s'agit. Ou, du moins, cette résistance, toujours très peu ou très lentement influente sur le mouvement de la matière pondérable, modifiera notablement, par la réaction égale et contraire qu'elle provoquera chez cette matière, le mouvement vibratoire de l'éther, infiniment moins massif. C'est ce que nous verrons dans la prochaine leçon.

2° Par suite de l'énorme intensité des actions atomiques, l'éther sera très élastique, à la manière d'un solide isotrope, lors des déformations tout à la fois assez rapides, pour ne pas permettre à la fluidité de se manifester, et assez faibles d'amplitude, pour laisser sans cesse les mêmes atomes dans leurs sphères d'activité mutuelles. Il pourra donc propager les vibrations transversales qui constituent la lumière ou la chaleur rayonnante; et il les transmettra avec la prodigieuse vitesse ω que l'on a dite, grâce à l'extrême petitesse de sa densité, qui le rend presque dépourvu d'inertie ou instantanément obéissant aux moindres impulsions.

3° Mais il ne pourra pas transmettre des ondes à vibrations longitudinales, surtout d'amplitude appréciable comme celles qui constituent le son dans l'air ou dans l'eau. Par suite, peut-être, de ce que l'écartement de ses atomes est assez grand pour y supprimer presque les répulsions aux plus petites distances existant entre eux, les attractions atomiques n'y sont guère neutralisées, à travers tout élément plan et à l'état naturel de repos, que par les répulsions physiques, exercées aux distances aussi grandes ou même plus grandes que le diamètre d'une molécule pondérable. Alors une très petite contraction linéaire, normale à l'élément plan, ou venant rapprocher un peu les couches de matière parallèles à celui-ci, ne fait pas naître entre ces couches, ou plutôt sur l'élément plan, cette pression qui, dans les corps à molécules, constitue justement l'élasticité en jeu lors des mouvements longitudinaux et s'y trouve due surtout, sinon uniquement, aux fortes répulsions supplémentaires provoquées, entre les molécules les plus proches, par la diminution même de leur distance à partir de l'état naturel (1).

---

(1) **Sur la non-propagation, par l'éther, des ondes à mouvements longitudinaux.** — Dans nos solides et nos liquides, les attractions et les répul-

Digitized by Google

A quoi il faut ajouter que, si les rapprochements et écartements des couches devenaient aussi grands qu'ils doivent l'être pour

---

sions intermoléculaires se neutralisent *à l'état naturel* (défini justement par l'annulation de la pression sur tout élément plan tracé à leur intérieur); et il est clair, par suite, qu'elles s'y neutralisent encore, non plus totalement, mais en majeure partie, dans leurs autres états, vu le peu de variation qu'y éprouvent, à température constante, la densité et les distances mutuelles moyennes des molécules voisines. Alors, si de petits rapprochements de couches parallèles suffisent pour y amener des pressions notables sur ces couches ou, pour mieux dire, à travers les éléments plans les séparant, on conçoit que ce doit être surtout à raison des répulsions, peu nombreuses relativement, mais énormes, créées par ces rapprochements, entre les molécules venues ainsi à des distances mutuelles inférieures aux plus petites qui y existassent à l'état naturel; car, à cette limite, les répulsions croissent, sans doute, si vite avec le rapprochement, qu'elles semblent, comparativement, avoir été nulles jusque-là, et apparaissent comme créées ou nouvelles. Or, malgré leur introduction prépondérante, et qui ne s'observerait plus si les couches, au lieu de se rapprocher, glissaient simplement les unes devant les autres, l'élasticité mise en jeu par ces rapprochements n'est pas d'un ordre de grandeur plus élevé que l'élasticité provoquée par les simples glissements. D'où il semble permis d'induire que, si les puissantes actions répulsives dont il s'agit disparaissaient, la résistance du milieu, aux déformations comprises entre les limites d'élasticité, serait incomparablement plus grande pour les glissements mutuels des couches que pour leur rapprochement. Ainsi paraît s'expliquer ce fait si extraordinaire, qu'à l'état élastique la résistance opposée par l'éther aux très petits rapprochements de ses couches soit comme nulle, par rapport à celle qu'il oppose à leurs glissements non moins petits; ou, ce qui revient au même, que la vitesse de propagation, Ω, de ses ondes à vibrations longitudinales, se réduise à une fraction presque infinitésimale de la vitesse ω de propagation de ses ondes, calorifiques ou lumineuses, à vibrations transversales. Nous avons été, en effet, conduits à admettre que les plus petites distances entre ses atomes (car il n'y a pas, chez lui, de molécules) ne sont pas assez petites pour assurer aux répulsions qui s'y exercent la prépondérance sur les autres actions élastiques en jeu, quand même les rapprochements croîtraient encore un peu.

Un pareil rapport, zéro environ, de Ω à ω, serait, il est vrai, impossible, si l'éther devait pouvoir, comme les solides, se diviser en fragments *isolés*, libres sur leur surface de toute pression, et néanmoins *stables*, c'est-à-dire susceptibles de recevoir de très petits ébranlements initiaux *quelconques* sans faire explosion, ou, autrement dit, sans acquérir ensuite d'eux-mêmes des vitesses croissantes, avec déformations étendues. En effet, une telle stabilité exige qu'une certaine fonction Φ, appelée *potentiel d'élasticité*, mesurant le travail qu'absorbent par unité de volume, à partir de l'état naturel, les forces intérieures de ressort, soit toujours positive; et l'on démontre assez simplement que cette condition revient à poser les deux inégalités $\omega^2 > 0$, $\frac{\Omega^2}{\omega^2} > \frac{4}{3}$. Un solide (isotrope), divisible en fragments de forme quelconque, est ainsi astreint à les vérifier; et Ω y excède nécessairement ω. Mais la même raison de les poser n'existe pas pour l'éther, milieu indéfini ou, du moins, sans limites distinctes. Celui-ci, d'ailleurs, n'agit comme on vient de dire,

Digitized by Google

communiquer à notre ouïe des impulsions perceptibles ou susceptibles d'être *entendues*, les limites d'élasticité de l'éther seraient, sans doute, de beaucoup dépassées. Et les forces élastiques n'y

---

que dans les rapides mouvements d'amplitude très faible. Or on verra bientôt que de pareils mouvements, en se propageant dans l'éther soit du vide, soit des corps, n'y amènent que des variations relatives de densité ou nulles ou, du moins, très petites, par rapport aux *déformations* proprement dites, c'est-à-dire par rapport aux *différences* des dilatations ou contractions *linéaires* produites en même temps suivant les divers sens; et, dans ces conditions, même l'hypothèse $\Omega = 0$ ne peut pas donner lieu à des potentiels Φ négatifs, qui surviendraient seulement si les changements relatifs de *volume* pouvaient être au moins du même ordre de grandeur que les changements de *forme*. Mais j'espère trouver, dans le Tome II, l'occasion de revenir sur ce sujet, à propos de la théorie mécanique de la lumière, en montrant ce qu'y devient généralement l'équation des forces vives pour les corps transparents.

Quant aux déformations de grandeur sensible excédant les limites d'élasticité, et pour lesquelles disparaît entièrement la proportionnalité des efforts à leurs effets, c'est-à-dire à ces déformations, il est probable que plus rien n'y subsiste des propriétés précédentes, et que l'éther s'y comporte comme un fluide, ou comme un solide qu'on aurait entièrement débarrassé, par une pulvérisation infinie, de sa résistance statique aux glissements mutuels des couches. C'est donc, alors, la résistance aux mouvements transversaux qui doit, comme dans nos fluides, devenir négligeable par rapport à la résistance aux déplacements longitudinaux. Ainsi, l'éther semble, jusqu'à un certain point, posséder *alternativement*, mais jamais à la fois dans une mesure sensible, les deux sortes d'élasticité que les solides nous offrent réunies, savoir : l'*élasticité de volume* ou résistance aux mouvements longitudinaux qui, rapprochant ou écartant les couches, changent le volume apparent, et l'*élasticité de forme* ou résistance aux mouvements transversaux qui, faisant glisser les couches les unes devant les autres, altèrent seulement la forme du corps. Dépourvu de la première de ces deux élasticités dans les cas de déformations très petites et très rapides, il l'est de la seconde dès que les déformations sont sensibles.

Certains de nos corps pourraient-ils offrir ainsi, successivement et séparément, les deux sortes d'élasticité? Ce ne sauraient être les solides, en possession des deux élasticités réunies dès les plus faibles déformations. Et quant aux fluides, qui offrent, comme l'éther, l'élasticité de volume lors des grandes déformations, il est peu probable qu'ils soient réduits à l'élasticité de forme ou de rigidité dans les très petites, supposées se produire assez rapidement en sens inverses pour que la fluidité n'ait pas le temps de s'y manifester, ou la reconstitution graduelle de l'isotropie celui d'y altérer le mode de contexture primitif. Car l'énergie des répulsions aux plus petites distances intermoléculaires doit y être prédominante, même chez les gaz. Mais il serait sans doute difficile de constater expérimentalement la fugitive élasticité de forme dont il s'agit ici : car nous ne connaissons pas, dans les fluides pondérables, de phénomène ondulatoire d'assez faible amplitude et d'assez grande fréquence pour y obéir aux lois de mouvement des solides élastiques, c'est-à-dire pour y manifester une sorte de rigidité, au voisinage de l'état naturel ou de repos.

Digitized by Google

offriraient plus cette proportionnalité aux déformations, qui est nécessaire pour arriver à des équations simples du mouvement, ou pour obtenir une propagation et une succession régulières des ondes.

Aussi le son ne se transmet-il pas dans l'éther, comme le montre l'expérience classique de la sonnerie isolée sous le récipient de la machine pneumatique, et que l'on n'entend plus dès que l'air intérieur se trouve suffisamment raréfié. D'ailleurs, l'éther propageât-il les ondes d'une telle sonnerie, que l'extrême faiblesse de sa densité réduirait sa force vive au point de le rendre incapable d'ébranler sensiblement les molécules de notre oreille ou de nos autres organes. Il ne faut rien moins que le nombre prodigieux, par seconde, des vibrations lumineuses ou calorifiques, produisant tout autant de pulsations ou impulsions concordantes sur les minuscules groupes atomiques de notre rétine ou de notre épiderme susceptibles de vibrer à l'unisson de l'éther, pour qu'il en résulte, après des milliards de pareilles secousses, des changements périodiques de leur configuration interne perçus par la conscience, sous la forme sommaire et totalisée de sensations de lumière ou de chaleur.

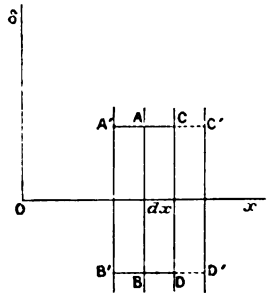
25. **Aperçu théorique sur la propagation des ondes dans l'éther libre : équations de leur mouvement.** — Pour l'intelligence des phénomènes calorifiques, il est indispensable d'établir d'abord l'équation très simple aux dérivées partielles qui régit, à une première approximation, les vibrations transversales et la progression des ondes, dans l'éther libre considéré comme un milieu isotrope parfaitement élastique. C'est l'équation à laquelle se réduisent celles des petits mouvements de l'éther, quand il s'agit d'ondes planes, perpendiculaires à un même axe pris pour axe des x, le long duquel elles cheminent en déplaçant partout où elles arrivent les particules d'éther, d'une même quantité dans chaque surface d'onde et suivant une même direction dans toutes, pendant des temps et sur des étendues qu'on peut regarder comme indéfinis par rapport à la durée τ d'une vibration ou au chemin λ (longueur d'onde) parcouru par chaque onde pendant la durée τ. En effet, ces diverses circonstances (forme plane et parallélisme des surfaces d'onde, constance ou lente variabilité de la direction et de la grandeur des dépla-

Digitized by Google

cements, etc.) sont réalisées, à fort peu près, dans les petites étendues de dimensions comparables à λ et durant les temps de l'ordre de τ. On peut donc les admettre dans l'établissement de l'équation de mouvement approchée que l'on cherche.

Soit donc ABDC une tranche d'éther d'épaisseur dx, ayant pour bases AB, CD des portions de surfaces d'onde égales, par exemple, à l'unité d'aire et que, pour fixer les idées, nous supposerons de

Fig. 2.



forme rectangulaire. D'après l'une de nos hypothèses, tous les atomes de cette tranche auront éprouvé sensiblement, à l'époque t, suivant une direction donnée $O\delta$ normale à Ox et à partir de leurs situations primitives de repos ou d'état naturel, un même déplacement δ, fonction continue de x et de t, qui définira justement le mouvement vibratoire étudié.

Si ρ désigne la densité de l'éther, la tranche aura pour force motrice actuelle le produit

$$\rho\, dx \frac{d^2\delta}{dt^2} \tag{3}$$

de sa masse $\rho\, dx$ par son accélération. Or cette force motrice égale la résultante des deux tractions élastiques dirigées suivant $O\delta$, en lesquelles se résument les actions exercées sur la tranche ABDC par ses deux voisines CDD'C' et ABB'A' [1].

---

[1] Vu la parité supposée des déplacements de A à B, ou de C à D, les actions que supportera le contour de la tranche seront des pressions égales et contraires sur les étroites faces opposées de ce contour; et elles donneront zéro pour leur somme algébrique suivant $O\delta$, comme suivant toute autre direction.

Digitized by Google

Évaluons d'abord la réaction élastique que le mouvement vibratoire détermine, à travers la face AB du prisme ABDC, sur le prisme précédent A'B'BA. Elle provient de l'inégalité de leur déplacement δ, qui, dans le prisme proposé ABDC, excède de $\frac{d\delta}{dx}dx$, à très peu près, sa valeur dans le précédent A'B'BA. Il faut prendre le rapport $\frac{d\delta}{dx}$ de cet excédent à la distance dx des deux plans A'B', AB, entre lesquels il se produit, pour avoir ce qu'on appelle la *déformation* (*de glissement* ou *de cisaillement*) subie par la matière près de la face AB, déformation en vertu de laquelle la tranche ABDC tend à entraîner la précédente dans le sens Oδ. Or le principe expérimental qui sert de base à la théorie de l'élasticité consiste dans la proportionnalité des efforts aux déformations. Donc, si μ désigne, dans le cas présent, le coefficient de cette proportionnalité, dit *coefficient de l'élasticité transversale* ou *de glissement,* la réaction en question sera $\mu\frac{d\delta}{dx}$ par unité de surface et, par conséquent, à travers toute la face AB. L'action, égale et contraire, du prisme A'B'BA sur le proposé ABDC vaudra donc $-\mu\frac{d\delta}{dx}$, toujours suivant Oδ.

D'ailleurs, la traction de la tranche suivante CDD'C' sur la proposée ABDC, pour l'entraîner suivant Oδ, sera l'analogue de la réaction précédente $\mu\frac{d\delta}{dx}$: mais elle se trouvera évaluée pour l'abscisse $x + dx$ de CD et non plus pour celle, x, de AB; en sorte qu'elle excédera la précédente de sa différentielle en x, $\mu\frac{d^2\delta}{dx^2}dx$.

La résultante, à évaluer, des actions élastiques sollicitant la tranche ABDC est donc précisément cette différentielle, qu'il suffit dès lors d'égaler à la force motrice (3). Et il vient, par la suppressoin du facteur commun dx, c'est-à-dire en rapportant finalement la force motrice et l'action élastique totale à l'unité du volume dx de la tranche, l'équation aux dérivées partielles cherchée,

$$(4) \qquad \rho\frac{d^2\delta}{dt^2} = \mu\frac{d^2\delta}{dx^2}.$$

L'éther étant un milieu isotrope, son coefficient μ d'élasticité ne dépend pas de la direction des ondes, ni de l'orientation de la

Digitized by Google

vibration dans leurs plans; c'est donc, comme la densité ρ, une constante physique, ayant même valeur tout au moins dans des régions immenses, où l'on peut supposer homogène l'éther libre.

D'ailleurs, si l'on associait à l'axe des x deux autres axes des y et des z, rectangulaires entre eux et au premier, la dérivée $\frac{d^2\delta}{dx^2}$ pourrait être remplacée par la somme $\frac{d^2\delta}{dx^2} + \frac{d^2\delta}{dy^2} + \frac{d^2\delta}{dz^2}$, puisque celle-ci aurait ses deux derniers termes nuls dans les hypothèses simples où nous nous sommes placés. Et comme enfin la somme en question constitue un *invariant* de la fonction δ, c'est-à-dire une expression ayant sa valeur indépendante de l'orientation des axes rectangulaires choisis [1], l'équation du mouvement serait encore

$$(5) \qquad \rho \frac{d^2\delta}{dt^2} = \mu\left(\frac{d^2\delta}{dx^2} + \frac{d^2\delta}{dy^2} + \frac{d^2\delta}{dz^2}\right),$$

quelle que fût l'orientation des ondes planes et des vibrations par rapport aux axes coordonnés. Mais rappelons, à ce propos, que la somme des trois dérivées secondes directes en x, y, z d'une fonction s'exprime, d'une manière abrégée, en mettant le symbole Δ_2 devant la fonction : le second membre de l'équation précédente (5) s'écrira donc simplement $\mu\Delta_2\delta$.

Enfin, si ξ, η, ζ désignent les trois *déplacements suivant les axes*, c'est-à-dire les trois projections du déplacement δ sur les x, y, z, projections ne différant ici de δ que par un facteur constant, il est clair que l'équation (5) donnera, pour régir ξ, η, ζ, les trois équations aux dérivées partielles (écrites à la manière d'une équation unique)

$$(6) \qquad \rho \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = \mu\Delta_2(\xi, \eta, \zeta).$$

Ces équations de mouvement ne sont, de la sorte, établies que pour les systèmes d'ondes planes, à vibrations transversales, d'amplitude uniforme sur toute surface d'onde et d'orientation constante.

---

[1] C'est, comme on sait, le *paramètre différentiel du second ordre* de la fonction de point considérée : *voir*, au sujet de sa signification géométrique, le tome I, fascicule 2 (p. 70* à 72*), de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*.

Digitized by Google

Des démonstrations plus complètes, empruntées à la théorie de l'élasticité, prouvent cependant qu'elles s'appliquent encore quand il s'agit d'ondes courbes propagées dans l'éther *libre*, avec amplitude et direction du déplacement variables d'un point à l'autre et d'un instant à l'autre [1]. On remarquera qu'elles donnent comme

---

[1] **Équations générales des petits mouvements de l'éther libre.** — Voici comment on peut établir ces équations, même sans supposer connues les formules de la théorie de l'élasticité, mais en admettant seulement que les trois forces motrices $\rho \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$, suivant les axes et par unité de volume, d'une particule d'éther, dépendent *linéairement*, comme dans tout corps élastique vibrant, des déplacements relatifs éprouvés par la matière (éthérée) dans un rayon extrêmement petit autour de la particule.

Ces déplacements relatifs se trouvent évidemment définis, à une première approximation, par les neuf dérivées partielles premières $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{d(x, y, z)}$ des déplacements absolus ξ, η, ζ par rapport aux coordonnées de repos, primitives ou moyennes, x, y, z, et, à une approximation plus élevée, par les dix-huit dérivées partielles secondes analogues $\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{d(x, y, z)\, d(x, y, z)}$. Donc, les trois forces motrices $\rho \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$ seront certaines fonctions linéaires ou de ces dérivées premières, ou, à leur défaut, de ces dérivées secondes.

Reconnaissons d'abord que les dérivées premières ne pourront pas y figurer. En effet, l'éther étant, à l'état de repos, homogène et même isotrope ou pareillement constitué par rapport à tous les systèmes d'axes qu'une rotation quelconque déduit d'un premier système rectangulaire Ox, Oy, Oz, on pourra, sans altérer les formules de $\rho \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$, supposées contenir $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{d(x, y, z)}$, faire tourner, par exemple, de deux droits, Oy et Oz autour de Ox, c'est-à-dire changer y, z en $-y$, $-z$ et η, ζ en $-\eta$, $-\zeta$, sans toucher ni à x, ni à ξ. L'expression linéaire de $\rho \frac{d^2\xi}{dt^2}$ ne devra donc pas changer par la rotation dont il s'agit; ce qui oblige à en exclure les dérivées qui changeraient de signe, c'est-à-dire $\frac{d\xi}{d(y, z)}$, $\frac{d(\eta, \zeta)}{dx}$, ou à n'y laisser que les termes en $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d(\eta, \zeta)}{d(y, z)}$. Au contraire, les expressions de $\rho \frac{d^2(\eta, \zeta)}{dt^2}$ devront changer de signe; ce qui en exclura les termes en $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d(\eta, \zeta)}{d(y, z)}$, ainsi que le terme constant (indépendant de toute dérivée), si l'on avait jugé devoir en mettre un, pour plus de généralité.

Mais une rotation analogue de Oz et Ox, autour de Oy, obligerait à exclure, de même, $\frac{d\eta}{dy}$, $\frac{d(\zeta, \xi)}{d(z, x)}$, et le terme constant, de $\rho \frac{d^2\xi}{dt^2}$; de sorte qu'il y resterait seulement les deux termes en $\frac{d\eta}{dz}$ et $\frac{d\zeta}{dy}$. Or, si l'on fait tourner d'un droit seulement Oy et Oz autour de Ox, z se change en y, ζ en η, et y se change en

Digitized by Google

valeurs des forces motrices $\rho \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$, suivant les trois axes, de la masse ρ, qui est celle de l'unité de volume d'éther, les trois

---

$-z$, η en $-\zeta$; de sorte que, dans l'expression, qui doit garder sa forme, de $\rho \frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d\eta}{dz}$, $\frac{d\zeta}{dy}$ se changeraient en $-\frac{d\zeta}{dy}$, $-\frac{d\eta}{dz}$; et les deux seuls coefficients pouvant y figurer devraient être égaux avec signes contraires. Autrement dit, $\rho \frac{d^2\xi}{dt^2}$ contiendrait seulement un terme en $\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}$. Mais nulle force motrice $\rho \frac{d^2\xi}{dt^2}$ ne peut naître, dans l'éther, d'un simple *mouvement d'ensemble* de toute sa matière, comme serait une rotation élémentaire ρ autour de Ox, donnant $\xi = 0$, $\eta = -\rho z$, $\zeta = \rho y$, $\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} = -2\rho$. Donc le coefficient de $\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}$ est tenu de s'y annuler; et nul terme ne peut figurer dans les seconds membres des équations cherchées du mouvement, avant ceux où seront les dérivées secondes $\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{d(x, y, z)\, d(x, y, z)}$.

Ce sont, par conséquent, les dérivées secondes de ξ, η, ζ en x, y, z, que contiendra l'expression de $\rho \frac{d^2\xi}{dt^2}$. Mais les mêmes rotations d'axes (de deux angles droits) examinées ci-dessus n'y laisseront d'abord subsister que les huit dérivées

$$\frac{d^2\xi}{(dx^2,\ dy^2,\ dz^2,\ dy\, dz)},\quad \frac{d^2(\eta, \zeta)}{dx\, d(y, z)}$$

et, puis, en excluront $\frac{d^2\eta}{(dy^2,\ dz^2,\ dx^2,\ dz\, dx)}$, $\frac{d^2(\zeta, \xi)}{dy\, d(z, x)}$, c'est-à-dire, d'entre les huit précédentes, $\frac{d^2\xi}{dy\, dz}$, $\frac{d^2\eta}{dz\, dx}$, $\frac{d^2\zeta}{dx\, dy}$; ce qui réduira l'expression aux cinq termes en $\frac{d^2\xi}{(dx^2, dy^2, dz^2)}$, $\frac{d^2\eta}{dx\, dy}$, $\frac{d^2\zeta}{dx\, dz}$, où, enfin, $\frac{d^2\xi}{dy^2}$, $\frac{d^2\xi}{dz^2}$, d'une part, et $\frac{d^2\eta}{dx\, dy}$, $\frac{d^2\zeta}{dx\, dz}$, d'autre part, auront coefficients pareils, comme le montrera la rotation d'un droit considérée également ci-dessus. J'appellerai ces coefficients μ pour les deux premiers des termes en question, $(\iota - 1)\mu$ pour les deux autres; et je désignerai par $(\iota + \varkappa)\mu$, ou par $\mu + (\iota - 1)\mu + \varkappa\mu$, le coefficient du terme en $\frac{d^2\xi}{dx^2}$. Introduisons alors le trinome symétrique

$$(\alpha) \qquad \theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz},$$

invariable par tous les changements rectangulaires d'axes, comme on peut le voir aux pages 104* à 106* du Tome Ier (*Calcul différentiel, Compléments*) de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (où, seulement, ξ, η, ζ sont remplacés par les lettres u, v, w), trinome exprimant la *dilatation cubique* produite en (x, y, z) par les déplacements ξ, η, ζ. Il viendra

Digitized by Google

expressions respectives $\mu\Delta_2\xi$, $\mu\Delta_2\eta$, $\mu\Delta_2\zeta$. Celles-ci représentent donc, *dans l'éther libre* (ou éther du vide), les trois composantes

---

l'équation

$$(\alpha') \qquad \rho\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mu\left[\Delta_2\xi + (\iota - 1)\frac{d\theta}{dx} + \varkappa\frac{d^2\xi}{dx^2}\right].$$

Cela posé, faisons tourner du tiers et puis des deux tiers d'une circonférence les axes des x, y, z autour de la droite, émanée de l'origine, qui est également inclinée sur tous les trois, de manière à amener Ox, Oy, Oz, d'abord dans la position primitivement occupée par Oy, Oz, Ox et, ensuite, dans celle de Oz, Ox, Oy. L'isotropie du milieu permettra évidemment d'effectuer dans la formule précédente (α') une et puis deux permutations tournantes sur les lettres x, y, z et ξ, η, ζ; ce qui donnera les autres équations de mouvement :

$$(\alpha'') \qquad \left\{\begin{aligned} \rho\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \mu\left[\Delta_2\eta + (\iota - 1)\frac{d\theta}{dy} + \varkappa\frac{d^2\eta}{dy^2}\right],\\ \rho\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \mu\left[\Delta_2\zeta + (\iota - 1)\frac{d\theta}{dz} + \varkappa\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right].\end{aligned}\right.$$

Or, remplaçons les axes des x, y, z par de nouveaux axes rectangulaires des x_1, y_1, z_1, de même sens relatif, mais orientés d'ailleurs arbitrairement dans l'espace, et par rapport auxquels les déplacements soient ξ_1, η_1, ζ_1. L'expression de ξ_1, par exemple, sera $a\xi + b\eta + c\zeta$, si a, b, c désignent les trois cosinus directeurs de Ox_1 relativement à Ox, Oy, Oz. On aura donc

$$\rho\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = a.\rho\frac{d^2\xi}{dt^2} + b.\rho\frac{d^2\eta}{dt^2} + c.\rho\frac{d^2\zeta}{dt^2},$$

c'est-à-dire, vu les formules (α'), (α''), où θ gardera en chaque point la même expression dans le nouveau système d'axes et où le Δ_2 de chaque fonction aura sa valeur en chaque point indépendante des axes choisis,

$$(\alpha''') \qquad \left\{\begin{aligned} \rho\frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \mu\Bigg[&\Delta_2(a\xi + b\eta + c\zeta) + (\iota - 1)\left(a\frac{d\theta}{dx} + b\frac{d\theta}{dy} + c\frac{d\theta}{dz}\right)\\ &+ \varkappa\left(a\frac{d^2\xi}{dx^2} + b\frac{d^2\eta}{dy^2} + c\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right)\Bigg].\end{aligned}\right.$$

Les deux trinomes $a\xi + b\eta + c\zeta$, $a\frac{d\theta}{dx} + b\frac{d\theta}{dy} + c\frac{d\theta}{dz}$ étant évidemment ξ_1 et $\frac{d\theta}{dx_1}$, cette équation aura, comme l'exige l'isotropie du milieu, la forme même de (α'), à la condition, nécessaire et suffisante, de poser

$$(\beta) \qquad \varkappa\left(\frac{d^2\xi_1}{dx_1^2} - a\frac{d^2\xi}{dx^2} - b\frac{d^2\eta}{dy^2} - c\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right) = 0.$$

Mais l'expression de $\frac{d^2\xi_1}{dx_1^2}$ en fonction des dérivées de ξ, η, ζ en x, y, z, est, sous forme symbolique,

$$\left(a\frac{d}{dx} + b\frac{d}{dy} + c\frac{d}{dz}\right)\left(a\frac{d}{dx} + b\frac{d}{dy} + c\frac{d}{dz}\right)(a\xi + b\eta + c\zeta),$$

comme on peut le voir d'après les formules données aux pages citées ci-dessus

Digitized by Google

totales, par unité de volume, des actions élastiques exercées sur toute particule éthérée élémentaire par l'éther ambiant et provo-

---

de mon *Cours d'Analyse;* et son développement contient, non seulement les trois dérivées secondes directes $\frac{d^2\xi}{dx^2}$, $\frac{d^2\eta}{dy^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dz^2}$, mais aussi les autres dérivées secondes, non moins arbitraires que ces trois, de ξ, η, ζ en x, y, z. La quantité entre parenthèses, dans (β), n'est donc pas nulle identiquement; et il faut poser $\varkappa = 0$.

Donc, les équations *isotropes* cherchées du mouvement seront, en les condensant dans une formule triple,

$$(\beta') \qquad \rho\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = \mu\left[\Delta_2(\xi, \eta, \zeta) + (\iota - 1)\frac{d\theta}{d(x, y, z)}\right].$$

Spécifions-les pour le cas particulier d'ondes planes à déplacements longitudinaux, propagées dans le sens des x, où l'on aurait $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\theta = \frac{d\xi}{dx}$, et ξ fonction seulement de x et de t. Elles s'y réduisent à

$$(\beta'') \qquad \rho\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mu\iota\frac{d^2\xi}{dx^2}.$$

Or nous admettons, comme propriété caractéristique de l'éther, que les déplaments constituant de telles ondes ne provoquent dans l'éther aucune réaction ou force motrice sensible, c'est-à-dire comparable à celle que donneraient de pareils déplacements, mais transversaux ou concernant, par exemple, η et non ξ; ce qui réduirait les équations (β') à l'équation (4) du texte, ou à

$$(\gamma) \qquad \rho\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mu\frac{d^2\eta}{dx^2}.$$

Donc le coefficient $\iota\mu$, dans (β''), doit être comme infiniment petit par rapport au principal coefficient d'élasticité μ de l'éther; et l'on peut poser $\iota = 0$, c'est-à-dire remplacer les équations (β') par celles-ci :

$$(\gamma') \qquad \rho\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = \mu\left[\Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)}\right].$$

Ces trois équations où la dilatation cubique θ a l'expression (α), différentiées respectivement en x, y, z et ajoutées, donnent, pour régir directement les variations de θ, la nouvelle équation indéfinie

$$\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0;$$

et celle-ci conduit à prendre pour θ, en chaque point (x, y, z), une expression linéaire en t, de la forme $A + Bt$.

D'ailleurs, les mouvements de l'éther étudiés ici consistent en de minimes quoique rapides déplacements vibratoires de part et d'autre de situations moyennes (x, y, z) de repos, et non en des déplacements plus ou moins lents de ces situations moyennes elles-mêmes, qui ne seraient pas du tout régis par les

Digitized by Google

quées par des déplacements actuels ξ, η, ζ définis en fonction de x, y, z; car ces trois composantes totales sont les seules forces extérieures qui puissent mouvoir la particule (¹).

26. Propagation des ondes dans l'éther libre : vitesse des radiations lumineuses ou calorifiques. — Bornons-nous à déduire de l'équation (4) la loi de propagation de nos ondes planes suivant leur normale Ox.

Si nous posons

$$\frac{\mu}{\rho} = \omega^2, \tag{7}$$

équations ci-dessus, mais plutôt par celles des fluides. Donc ξ, η, ζ et, par suite, θ ont, en chaque point, leurs valeurs moyennes, durant tout instant sensible, égales à zéro; et il vient $B = 0$, $A = 0$; d'où, aussi, $\theta = 0$.

Ainsi, les trois équations (γ') se réduisent bien, *pour l'éther libre,* à

$$\rho \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = \mu \Delta_2(\xi, \eta, \zeta);$$

et, de plus, les trois déplacements vibratoires ξ, η, ζ y vérifient la condition $\theta = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

Les mêmes conclusions subsisteraient évidemment, sans que l'on eût à invoquer le fait de l'annulation des valeurs moyennes de ξ, η, ζ en chaque point, si le mouvement avait succédé au repos dans la région considérée, ou qu'il s'y fût propagé d'ailleurs. Car, alors, il y aurait eu, en (x, y, z) et autour, un état initial où ξ, η, ζ et, par suite, θ se seraient annulés avec leurs dérivées premières en t, donnant ainsi $B = 0$ et, finalement, $A = 0$.

(¹) Dans des cas moins simples, où l'éther serait entremêlé çà et là de molécules pondérables compliquant, par leur résistance aux vibrations de l'éther, les équations du mouvement, rien ne garantirait plus, en général, l'annulation constante de la dilatation cubique θ. Alors les trois composantes de l'impulsion élastique de l'éther, sur l'unité de son volume, conserveraient néanmoins à fort peu près, partout ailleurs qu'au contact des molécules pondérables, leurs expressions en fonction des dérivées de ξ, η, ζ par rapport à x, y, z; mais, d'après les équations (γ') de mouvement démontrées dans la Note précédente, ces expressions seraient

$$\mu\left(\Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx}\right), \quad \mu\left(\Delta_2\eta - \frac{d\theta}{dy}\right), \quad \mu\left(\Delta_2\zeta - \frac{d\theta}{dz}\right),$$

où θ, dilatation cubique, représente le trinome, *pouvant* alors, généralement, différer de zéro,

$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

Digitized by Google

l'équation (4), divisée par ρ, sera celle dite *de d'Alembert* ou *des cordes vibrantes,*

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2\delta}{dx^2}.$$

On sait, et l'on vérifie d'ailleurs immédiatement, qu'elle est satisfaite par toute expression de la forme

$$\delta = f(x - \omega t),$$

où f désigne une fonction arbitraire de la variable unique $x - \omega t$. Or, une pareille solution exprime que δ ne change pas quand t croît de dt, pourvu que x croisse en même temps de $\omega\, dt$, c'est-à-dire pourvu que l'observateur fictif, chargé de noter les déplacements δ produits là où il se trouve, chemine le long de l'axe des x avec la vitesse constante ω.

L'équation aux dérivées partielles obtenue signifie donc que *le milieu éthéré peut propager, normalement à la direction donnée des surfaces d'onde, telles vibrations transversales que l'on voudra,* périodiques, ou même non périodiques et représentées dans le plan $x = 0$ par la fonction arbitraire $f(-\omega t)$, *pourvu que la transmission se fasse avec la vitesse constante* ω, ou que les ondes progressent vers les x positifs avec cette vitesse (positive ou négative), dont la valeur absolue est $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, d'après (7). On pourra évidemment égaler ω à cette valeur absolue, si l'on se borne à un seul système d'ondes et que l'on dirige les x positifs du côté vers lequel elles avancent.

La vitesse commune ω de toutes les radiations lumineuses ou calorifiques dans le vide a donc pour carré le quotient du coefficient d'élasticité μ de l'éther libre par sa densité ρ.

Digitized by Google

QUATRIÈME LEÇON.

PROPAGATION DES ONDULATIONS CALORIFIQUES A L'INTÉRIEUR DES CORPS DIATHERMANES.

27. Constitution de l'éther à l'intérieur des corps pondérables. — Nous pouvons maintenant nous rendre quelque compte des phénomènes qui se passent, quand les ondulations lumineuses ou calorifiques propagées par l'éther libre arrivent à la surface d'un corps et pénètrent dans ses espaces intermoléculaires. Il est naturel, en effet, que les molécules pondérables se comportent alors comme des corps très massifs, fort éloignés les uns des autres eu égard à leurs dimensions, et plongés dans un fluide d'une densité excessivement faible.

Mais une question préalable se pose au sujet de l'éther où baignent ainsi ces groupes innombrables de molécules, considéré à l'état de repos. Doit-il avoir la même densité ρ et, par suite, la même élasticité μ, bref les mêmes propriétés, que l'éther libre? L'analogie des fluides qui nous sont plus familiers suggère la réponse à cette question. L'air, l'eau ne subissent aucune modification appréciable par le fait des poussières qui s'y trouvent disséminées ou même des masses pulvérulentes, supposées insolubles, à travers lesquelles ils filtrent. De minces couches fluides peuvent bien, sans s'incorporer aux particules solides (ce qui ne ferait qu'accroître la masse de celles-ci et ne compliquerait pas la question), adhérer à ces particules et se trouver condensées tout près de leur surface; mais elles constituent une très petite partie, *en volume,* de l'air ou de l'eau interposés qui, dans l'ensemble, gardent simplement leur densité et leurs autres propriétés physiques. Il y a donc lieu de penser que l'éther occupant les inter-

Digitized by Google

valles moléculaires est pareil à celui du vide, abstraction faite peut-être, autour de chaque molécule, d'une couche dont l'épaisseur totale serait seulement comparable au rayon d'activité des actions atomiques et dont le volume serait, par suite, négligeable, comparativement à celui de l'éther voisin non modifié.

Imaginons actuellement qu'une série d'ondes atteigne cet éther soit directement, soit en contournant les lourds flotteurs que seront pour lui les molécules pondérables. Il ne pourra évidemment exécuter ses vibrations sans être souvent gêné par la présence des molécules; et il y a lieu de se demander quelle sorte de résistance elles opposeront à son mouvement.

Ici encore, une analogie très naturelle nous guidera. Ce sera celle que fournit l'observation des petits mouvements, à courte période, d'un fluide autour d'un corps immergé et *sensiblement fixe*. La comparaison pourra se faire en se bornant, pour commencer, à ce cas simple; car les molécules seront, à raison de leur énorme densité par rapport à l'éther, maintenues comme immobiles par leur inertie, sinon toujours, du moins pendant un nombre très grand de périodes, même dans les cas où leur mouvement ne restera pas indéfiniment d'amplitude négligeable par rapport à celui de l'éther.

28. Résistance d'un corps au mouvement d'un fluide ambiant. — Or, dans la résistance, R, qu'oppose un corps immobile au mouvement d'une masse d'air ou d'eau l'environnant, et animée tout autour (sauf très près du corps) d'une petite vitesse commune mais assez vite changeante, il y a une partie principale, R_1, proportionnelle, pour tous les solides immergés de même forme, à la densité ρ et à l'accélération $\frac{dV}{dt}$ du fluide, ainsi qu'au volume ϖ du solide. Son expression, si A désigne une constante dépendant de la forme du corps, est

$$R_1 = A\rho\varpi\frac{dV}{dt}.$$

Elle se démontre en admettant, d'une part, des vitesses assez petites pour qu'on puisse supprimer des équations de mouvement les termes non linéaires par rapport à elles ou à leurs dérivées, et, d'autre part, une fluidité assez parfaite, ou se recon-

Digitized by Google

stituant assez vite pendant le mouvement considéré, pour que les frottements intérieurs restent négligeables (¹). Quand on veut tenir effectivement compte de ceux-ci, il faut ajouter à R_1 des termes plus complexes, qui dépendent des circonstances antérieures du mouvement depuis des époques quelque peu éloignées (²), et, en outre, un terme simple, proportionnel à la vitesse, que l'on peut représenter, pour un même corps, par

$$R_2 = KV.$$

Dans le cas, qui nous occupe ici, des molécules pondérables disséminées au sein d'un éther, très mobile et de densité très faible, exécutant des déplacements δ sensiblement pendulaires exprimés par le sinus ou le cosinus d'une fonction linéaire du temps t, toutes les dérivées successives de δ en t sont alternativement proportionnelles ou à ce cosinus, ou à ce sinus, avec des coefficients de proportionnalité fonctions eux-mêmes de la période τ. Or ces dérivées successives définissent, pour une époque quelconque t, les circonstances qu'a présentées le mouvement durant un certain laps de temps, pendant lequel on peut admettre que s'est prolongée leur influence sur R. Donc l'expression, supposée d'ailleurs linéaire, de R en $V, \frac{dV}{dt}, \frac{d^2V}{dt^2}, \frac{d^3V}{dt^3}, \ldots$, est réductible à deux termes seulement, affectés respectivement d'un cosinus et d'un sinus, c'est-à-dire proportionnels à deux dérivées consécutives de δ, comme V et $\frac{dV}{dt}$, par exemple, mais avec coefficients fonctions de la période vibratoire τ. On est ainsi ramené, en définitive, pour les deux parties de la résistance qui dépendront respectivement de l'accélération actuelle et de la vitesse actuelle, aux deux formules

(¹) Voir, dans le Tome II, la première partie de la Note I, nos 1 à 12.

(²) Voir, à ce sujet, la seconde partie de la Note I, nos 13 à 28. On peut y remarquer $\left[\text{nos } 20 \text{ et } 27, \text{ formules } (111) \text{ et } (155), \text{ où } V_x, V, \text{ de la forme } \cos kt, \text{ sont de l'ordre de grandeur de } \frac{1}{k}\frac{dV_x}{dt} \text{ ou de } \frac{1}{k}\frac{dV}{dt}\right]$ que, dans le cas de vibrations à très courte période (où k est très grand), la résistance se réduit sensiblement au premier terme, appelé ici R_1, où A reçoit la valeur $\frac{1}{2}$ quand le corps est une sphère, et la valeur 1 quand c'est un cylindre circulaire ayant son axe normal à la direction du mouvement.

Digitized by Google

ci-dessus de R_1 et de R_2, où il suffira de modifier plus ou moins les coefficients A et K.

En Mécanique rationnelle, il est fait mention uniquement de la partie des résistances fonction de la vitesse actuelle V, du moins dans le problème classique du mouvement d'un projectile à travers l'air ou l'eau. La raison en est que la vitesse V varie alors assez lentement pour laisser s'établir tout autour du projectile un régime à très peu près permanent, c'est-à-dire un mode d'écoulement sensiblement invariable du fluide sur la paroi du solide et, par suite, une pression, en chaque point de celle-ci, également invariable, comme si la vitesse actuelle V existait depuis un temps indéfini et que toutes les circonstances dont dépend l'action du milieu sur le mobile se fussent réglées d'après sa valeur V.

Mais il en est autrement dans le problème du pendule, quand il s'agit d'un pendule de faible longueur ou à brève période, oscillant dans l'air ou surtout dans l'eau. C'est alors la partie R_1 de la résistance qui prend une importance prépondérante; et comme elle égale, en valeur absolue, l'inertie d'une masse $A\rho\varpi$ de fluide, dont le volume $A\varpi$ serait la fraction A de celui du solide et la vitesse, à chaque instant, sa propre vitesse V, le pendule se comporte comme si, sa force accélératrice étant due à son poids apparent dans l'air ou dans l'eau, sa masse était accrue de celle d'un volume fluide égal à la fraction A du volume fluide qu'il déplace, masse représentant celle du fluide ambiant, en tant qu'il est entraîné, ou dont le pendule entretient en effet les oscillations simultanées aux siennes, mais d'amplitudes moindres [1]. Du Buat, au dernier siècle, avait déjà reconnu, par l'observation de pendules oscillant dans l'eau, que le coefficient A égale environ $\frac{1}{2}$, dans le

---

[1] Soit, en effet,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x$$

l'équation du mouvement (sensiblement rectiligne) suivant un axe Ox qui a sa direction, et alors qu'on néglige la résistance R_1. La mise en compte de celle-ci donnera évidemment $m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x - A\rho\varpi\frac{d^2x}{dt^2}$, ou $(m + A\rho\varpi)\frac{d^2x}{dt^2} = F_x$.

C'est bien l'équation de mouvement du pendule dans l'hypothèse d'un accroissement $A\rho\varpi$ de sa masse, sa force motrice se conservant égale à F_x.

Digitized by Google

cas des corps sphériques. Poisson a, depuis, obtenu théoriquement cette valeur de A [1].

29. Résistance opposée par une molécule pondérable au mouvement vibratoire de l'éther ambiant. — L'analogie nous conduit donc à admettre, sur l'éther divisé à la manière d'un fluide par toute molécule pondérable autour de laquelle il vibre lumineusement, une résistance se composant de deux parties, proportionnelles, l'une, R_1, à l'accélération relative de l'éther par rapport à la molécule, l'autre, R_2, à sa vitesse relative. Or, si nous tenons compte de ce fait que, lorsqu'on passe des oscillations d'un pendule, ou même de celles des molécules d'un corps sonore, aux vibrations lumineuses et calorifiques, la période vibratoire τ décroît dans un rapport presque infini, il sera naturel de supposer la partie R_2 négligeable devant la partie R_1, comme dans un pendule à oscillations très brèves. Car, par exemple, Δ désignant la demi-amplitude du mouvement, espace parcouru quatre fois durant chaque période τ par le mobile vibrant, la vitesse absolue moyenne est $\frac{4\Delta}{\tau}$: mais la vitesse vraie passe, durant le quart d'une période, de la valeur zéro à la valeur maxima, ou *vice versa;* de sorte que l'accélération absolue moyenne, quotient de la vitesse maxima par $\frac{1}{4}\tau$, excède $\frac{16\Delta}{\tau^2}$ et est du même ordre que cette fraction. Par suite, si l'on compare entre eux des mobiles pareils, mais à périodes vibratoires τ de plus en plus courtes, la partie R_1 de la résistance, sensiblement inverse de τ^2, croîtra à peu près, en valeur absolue et moyennement, comme le carré de la partie R_2, sensiblement inverse de τ. Elle effacera donc très vraisemblablement celle-ci, si la période τ devient moindre qu'un trillionième de seconde, ce qui a lieu pour l'éther vibrant.

Ainsi, nous exprimerons par la formule

$$R = A\varpi\rho\frac{dV}{dt} \tag{8}$$

---

[1] Dans son Mémoire *Sur les oscillations simultanées d'un pendule et de l'air environnant* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XI, p. 570; 1832). — *Voir* d'ailleurs, au second Volume du présent Cours, dans la Note finale I (n° 8), cette démonstration, réduite au maximum de simplicité.

Digitized by Google

la résistance totale R qu'oppose une molécule pondérable, de volume ϖ, à l'éther ambiant, de densité ρ, qui s'y heurte avec la vitesse variable V et s'y divise pour poursuivre, en la contournant, son mouvement vibratoire. Mais A ne sera plus, ici, un coefficient comparable à l'unité. Il atteindra d'énormes valeurs, car les mouvements dont il s'agit seront d'assez faible amplitude, et produiront d'assez rapides déformations, pour que l'éther s'y comporte, comme on a vu (p. 32), à la manière d'un solide incomparablement plus résistant à la rupture qu'un fluide parfait. Et si, malgré cette différence de nature ou de conditions, qui semblerait devoir rendre inapplicable toute analogie avec la résistance d'un fluide, la partie principale de R est néanmoins un terme proportionnel à l'accélération relative $\frac{dV}{dt}$, plutôt qu'un autre proportionnel à la vitesse relative V, ou même simplement fonction de la forme et des dimensions de la molécule, mais non de la vitesse du choc ou de sa dérivée, c'est encore parce que ce terme doit son importance exceptionnelle à l'extrême petitesse de la période τ, qui exagère l'accélération, pour toute amplitude donnée du mouvement, au point de rendre son influence prédominante sur toutes les autres en jeu dans la résistance R.

30. Équation du mouvement ondulatoire de l'éther d'un corps isotrope, dans l'hypothèse de la transparence ou diathermanéité de ce corps. — Considérons maintenant dans le corps une tranche mince d'éther, ayant pour base l'unité d'aire, et comprise entre deux surfaces d'onde assez voisines pour que toutes ses parties soient très sensiblement à une même phase du mouvement vibratoire, ou possèdent à chaque instant une vitesse commune, sauf auprès de chaque molécule pondérable que l'éther sera obligé de contourner. Nous attribuerons donc à cette tranche une épaisseur très petite comparativement à une longueur d'onde λ. Toutefois, pour pouvoir traiter le problème du mouvement sans une extrême complication, nous supposerons en même temps cette épaisseur suffisante, pour que le nombre des molécules pondérables y soit assez grand et distribué comme il l'est en moyenne dans un volume de dimensions sensibles. Bref, la portion considérée de tranche, tout en n'ayant qu'une épaisseur négligeable à côté de λ,

Digitized by Google

sera censée représenter fidèlement la composition d'un fragment notable du corps. Cette hypothèse reviendra à négliger la dispersion, dans les milieux pondérables où les longueurs d'onde seront du même ordre que dans l'éther libre. Quant à ceux où elles seraient beaucoup plus petites, et, par suite, comparables aux intervalles moléculaires, la propagation du mouvement par ondes régulières ne pourra pas s'y effectuer, comme on l'a vu dans la dernière leçon (p. 35) : aussi ne nous occuperons-nous pas actuellement de ces milieux, qui altéreront peut-être jusqu'à la période même du mouvement, pour nous borner aux milieux *transparents* ou *diathermanes,* c'est-à-dire capables, comme l'éther, de transmettre le mouvement par ondes bien continues.

D'après la formule (8), la résistance totale opposée à la tranche d'éther, par les molécules pondérables qu'elle contient, sera évidemment, si ϖ désigne le volume de l'une de celles-ci, A le coefficient qui se rapporte à sa forme et Σ un signe de sommation s'étendant à toutes ces molécules,

$$\sum A\varpi\rho\frac{dV}{dt} = \rho\frac{dV}{dt}\sum A\varpi.$$

Soit $\mathcal{R}$ cette résistance rapportée à l'unité de volume d'éther, c'est-à-dire divisée par la capacité, que j'appellerai ϖ', des intervalles moléculaires, excédent du volume apparent ou total de la tranche sur celui, $\Sigma\varpi$, des molécules qu'elle contient. Nous aurons ainsi

$$\mathcal{R} = \frac{\Sigma A\varpi}{\varpi'}\rho\frac{dV}{dt},$$

ou bien

$$\mathcal{R} = \alpha\rho\frac{dV}{dt}, \tag{9}$$

en posant

$$\alpha = \frac{\Sigma\varpi A}{\varpi'} = \frac{\Sigma\varpi A}{\Sigma\varpi}\,\frac{\Sigma\varpi}{\varpi'} = (\text{moyenne de A})\times\frac{\Sigma\varpi}{\varpi'}. \tag{10}$$

Le volume ϖ' des espaces intermoléculaires étant énorme par rapport à celui, $\Sigma\varpi$, des molécules pondérables, le coefficient α pourra être seulement comparable à l'unité et sera, en tout cas, d'un ordre de grandeur moindre que les valeurs de A pour les diverses molécules. On voit d'ailleurs qu'il est formé linéairement

Digitized by Google

au moyen de ces valeurs, c'est-à-dire composé de parties respectivement proportionnelles au nombre des molécules de chaque grandeur et de chaque forme (ou se présentant de même au mouvement vibratoire grâce à leur orientation) qui existent dans le corps par unité de capacité de ses espaces intermoléculaires, ou, ce qui revient très sensiblement au même, par unité de son volume apparent (¹).

Cela posé, dans l'équation (4) du mouvement vibratoire, obtenue précédemment (p. 46), et au second membre de laquelle les actions élastiques de l'éther avaient donné, comme force motrice de l'unité de son volume, le terme $\mu \frac{d^2 \delta}{dx^2}$, on pourra garder le même terme comme exprimant encore l'impulsion générale des forces élastiques de l'éther sur l'unité de volume de la tranche considérée. Il y aura, il est vrai, dans celle-ci, une lacune par molécule pondérable interposée et, en outre, des perturbations au mode de déformation autour de chaque lacune, où la présence de la molécule rompra la continuité du mouvement. Mais, d'une part, l'élasticité sera la même, en chaque endroit, que dans l'éther libre pour pareilles déformations, et, d'autre part, les déformations *moyennes* ou *générales* dans l'éther de la tranche, *seules propres à provoquer un effet élastique d'ensemble sur sa matière,* seront encore exprimées de même par la dérivée de δ en x (²). Ainsi

(¹) Pour abréger la démonstration, j'ai raisonné comme si les molécules d'un corps isotrope étaient isotropes elles-mêmes, c'est-à-dire résistaient, chacune, suivant le sens directement opposé au mouvement de l'éther, et avec la même intensité, quel que soit ce sens. On verra au Tome second, dans la Note II (nos 2, 4 et 5), que la formule définitive de $\mathfrak{R}$ reste la même quand le corps n'est isotrope que par neutralisation, en moyenne, de l'hétérotropie de ses molécules, et aussi comment elle se généralise dans le cas d'un corps hétérotrope.

(²) Comme les intervalles moléculaires sont supposés très grands par rapport aux dimensions des molécules, il est possible, en construisant la tranche d'éther considérée ou, plus généralement, l'élément $d\varpi$ de volume qui doit servir à poser les équations du mouvement, d'en fixer la surface limite, de manière que celle-ci ne coupe aucune molécule et même évite le voisinage immédiat de toute molécule, c'est-à-dire la zone des perturbations localisées autour d'elle. Dans ce but, on pourra, si c'est nécessaire, prendre légèrement courbes les faces de l'élément $d\varpi$, rien n'obligeant à les supposer planes. Alors les déformations effectives de l'éther sur toute la surface limite seront celles que nous appelons *générales* ou *moyennes,* et qui font produire par l'éther extérieur, sur l'éther intérieur, une impulsion élastique totale ayant pour composantes respectives suivant les

Digitized by Google

les actions élastiques de l'éther auront encore, sur l'unité de volume de la tranche, la résultante $\mu \frac{d^2\delta}{dx^2}$. Mais il faudra retrancher de celle-ci, pour avoir la force motrice $\rho \frac{d^2\delta}{dt^2}$, la résistance $\mathfrak{R}$ des molécules pondérables qui occupent les lacunes, c'est-à-dire le terme (9). Et l'équation du mouvement sera, pour l'éther du corps isotrope considéré,

$$\rho \frac{d^2\delta}{dt^2} = \mu \frac{d^2\delta}{dx^2} - \alpha\rho \frac{dV}{dt} \text{ (1)}.$$

Or, tant que l'éther n'a pas encore imprimé aux molécules pondérables (supposé même qu'il doive finir par le faire) des oscillations comparables aux siennes pour l'amplitude, la vitesse relative V de l'éther par rapport aux molécules n'est autre que sa vitesse absolue $\frac{d\delta}{dt}$. Le dernier terme se réduisant alors avec le premier, il vient simplement

$$\rho(1+\alpha) \frac{d^2\delta}{dt^2} = \mu \frac{d^2\delta}{dx^2} \text{ (2)}. \tag{11}$$

---

trois axes des x, y, z, d'après la note de la page 52,

$$\mu\left[\Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)}\right] d\varpi.$$

Comme le volume de l'éther intérieur qui subit cette impulsion est à peine inférieur à $d\varpi$, les trois composantes qui en résultent par unité de ce volume sont bien, très sensiblement,

$$\mu\left[\Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)}\right].$$

Dans le cas présent d'ondes planes normales aux x et à vibrations transversales, l'action élastique s'exercera donc suivant le sens des déplacements et égalera $\mu \frac{d^2\delta}{dx^2}$ sur l'unité de volume d'éther.

(1) Dans une étude plus complète, il y aurait lieu d'ajouter au second membre un petit terme proportionnel à δ, exprimant l'action totale, sur l'unité de volume de la tranche d'éther, des molécules pondérables éparses autour, jusqu'aux distances auxquelles s'arrêtent les attractions physiques : on verra, dans la Note II (n° 37), vers la fin du second Volume, comment il se fait que cette action ne soit pas toujours entièrement négligeable.

(2) Il s'agit ici d'un corps isotrope et homogène, où les molécules pondérables résistent (du moins en moyenne) au mouvement de l'éther suivant le sens même du mouvement, et avec la même énergie quel que soit ce sens. Aussi avons-nous

Digitized by Google

Ainsi, comme dans le problème du pendule court, où la résistance du fluide ambiant avait pour effet principal d'accroître fictivement l'inertie du mobile par l'addition, à sa masse, d'une proue et d'une poupe fluides qu'il entraînerait, la résistance des molécules pondérables d'un corps au mouvement vibratoire de son éther portera *fictivement* la densité ρ de celui-ci à la valeur $\rho(1+\alpha)$, ou semblera accroître sa masse dans le rapport de 1 à $1+\alpha$, constant pour chaque corps d'une densité et d'une composition moléculaires données.

---

pu admettre implicitement que les déplacements transversaux δ, tout en étant rapetissés par les résistances en question, gardaient leur direction et restaient dans les plans des ondes, ou n'entraînaient pas de dilatation cubique θ.

Si l'on voulait éviter cette hypothèse, on pourrait supposer d'abord quelconques les directions des ondes et celles des mouvements, de manière à remplacer le déplacement δ par ses trois composantes ξ, η, ζ suivant les x, y, z. Alors, au lieu de la résistance $\mathcal{R} = \alpha\rho \frac{dV}{dt}$ des molécules pondérables (par unité de volume de l'éther), on considérerait de même ses trois composantes respectives $-\alpha\rho \frac{d(u, v, w)}{dt}$, où les composantes $\frac{d(u, v, w)}{dt}$ de l'accélération relative de l'éther seraient très sensiblement $\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$. Et comme, d'ailleurs, les trois composantes totales des forces élastiques de l'éther sur l'unité du volume ϖ' de sa particule seraient, d'après la seconde Note de la page 61,

$$\mu\left[\Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)}\right],$$

le principe des quantités de mouvement, appliqué suivant les trois axes à cette unité de volume, donnerait, au lieu de (11), les trois équations

$$\rho(1+\alpha)\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = \mu\left[\Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)}\right].$$

Or celles-ci sont analogues à celles, (γ'), qui régissent généralement l'éther libre et que donne une Note antérieure (p. 51). Autrement dit, ces équations, différentiées respectivement en x, y, z et ajoutées, obligent encore à poser $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, c'est-à-dire $\theta = 0$, vu la nature vibratoire des déplacements étudiés ou aussi dans le cas de mouvements propagés d'ailleurs en (x, y, z). Elles se réduisent donc à

$$\rho(1+\alpha)\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = \mu\Delta_2(\xi, \eta, \zeta), \quad \text{avec la condition} \quad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0,$$

comme s'il s'agissait d'un éther libre dont la densité serait $\rho(1+\alpha)$. Et si enfin, d'une part, ξ, ζ étant nuls, on pose $\eta = \delta$, que, d'autre part, le déplacement δ soit indépendant de y et de z, ces quatre relations se réduisent bien à l'équation unique (11) du texte.

Digitized by Google

31. **Les radiations s'y transmettent comme dans un éther libre plus dense que celui du vide : première condition nécessaire pour la transparence ou la diathermanéité.** — Voilà comment se motive, d'une manière toute naturelle, l'hypothèse capitale de Fresnel, au sujet des *inégales densités* de l'éther dans les divers corps transparents, *malgré la constance de son élasticité*. Cette double supposition, inexplicable (sinon incompatible) prise à la lettre, n'a plus rien de paradoxal, dès que l'accroissement supposé de la densité ρ dans les corps n'est qu'une manière de mettre en compte la résistance de la matière pondérable aux impulsions de l'éther, c'est-à-dire, au fond, comme on verra, la faible participation de la matière pondérable au mouvement vibratoire de l'éther.

On remarquera qu'avec l'équation (11), obtenue, il est vrai, en négligeant la dispersion ou en exagérant quelque peu la petitesse des intervalles moléculaires par rapport à la longueur d'onde, la transmission du mouvement se fait aussi complètement qu'à travers l'éther libre, sans aucune déperdition, absorption ni dissémination dans le milieu pondérable traversé. Celui-ci sera donc *transparent* s'il s'agit de radiations lumineuses, *diathermane* s'il s'agit de radiations calorifiques; ou, plus exactement, comme l'équation (11) n'est qu'approchée, l'extinction et la dissémination des ondes seront très peu sensibles sur des parcours seulement comparables à une longueur d'ondulation. Mais la vitesse de propagation, maintenant égale à $\sqrt{\frac{\mu}{\rho(1+\alpha)}}$ d'après la formule (7), et, par suite, la longueur d'onde $\lambda = \tau\sqrt{\frac{\mu}{\rho(1+\alpha)}}$, seront réduites dans le rapport de $\sqrt{1+\alpha}$ à 1. Nous savons que cette dernière, λ, devra cependant rester encore très grande par rapport aux intervalles moléculaires, si l'on veut que la transmission du mouvement par ondes régulières ne devienne pas impossible. La transparence ou la diathermanéité impliquent donc l'hypothèse que le nombre α ne soit pas trop grand.

32. **Expression des petits déplacements imprimés à la matière pondérable par l'éther vibrant.** — Pour établir l'équation (11), nous avons dû supposer que les molécules pondérables ne pre-

Digitized by Google

naient, sous l'action de l'éther ambiant, qu'un mouvement vibratoire négligeable d'amplitude, comparativement au mouvement même de l'éther. Or il faut bien, vu l'énorme inertie relative de chaque molécule, qu'il en soit ainsi, pendant la durée d'un grand nombre de vibrations à partir de l'instant où les ébranlements ont commencé à solliciter la molécule. Mais il n'y a aucune raison générale pour que cette quasi-immobilité de la matière pondérable se maintienne après un nombre suffisant de vibrations de l'éther ou, par conséquent, d'impulsions distinctes exercées par lui sur les molécules qu'il *baigne* de toutes parts. Reconnaissons qu'elle persistera, pourvu que les actions mutuelles ou élastiques reliant les molécules ne viennent pas accroître peu à peu leurs déplacements. Et alors le corps, ayant bien le mouvement vibratoire de son éther régi indéfiniment par l'équation (11), sera transparent ou diathermane.

Appelons ρ' la densité du corps ou, à fort peu près, la masse pondérable immergée dans l'unité de volume d'éther de la tranche élémentaire considérée plus haut; et soit δ' le déplacement vibratoire moyen de cette masse, évidemment parallèle, dans un corps isotrope, aux déplacements mêmes δ de l'éther qui l'ont provoqué. La force motrice de la masse en question sera, toujours par unité de volume de l'éther, $\rho' \frac{d^2\delta'}{dt^2}$.

Cela posé, plaçons-nous d'abord dans la supposition la plus simple relativement aux actions mutuelles des molécules, savoir, la supposition où ces actions n'existeraient pas. Chaque molécule pondérable se comportera comme si elle était seule en présence de l'éther ambiant, et n'éprouvera aucune autre action que sa poussée dynamique. Il est clair qu'alors la force motrice $\rho' \frac{d^2\delta'}{dt^2}$, due uniquement à cette poussée de l'éther sur la matière pondérable, sera égale et contraire à la réaction $\mathcal{R}$ de celle-ci sur l'éther; et l'on pourra, d'après (9), écrire

$$\rho' \frac{d^2\delta'}{dt^2} = \alpha\rho \frac{dV}{dt}, \qquad \text{ou même} \qquad \rho' \frac{d^2\delta'}{dt^2} = \alpha\rho \frac{d^2\delta}{dt^2},$$

du moins tant que la vitesse relative V se confondra sensiblement avec la vitesse absolue $\frac{d\delta}{dt}$, c'est-à-dire jusqu'à ce que l'amplitude

Digitized by Google

vibratoire des molécules devienne comparable à celle de l'éther, si elle doit jamais le devenir. On aura donc, en attendant,

$$\rho' \frac{d^2 \delta'}{dt^2} - \alpha \rho \frac{d^2 \delta}{dt^2} = 0.$$

Or, vu la petitesse des amplitudes vibratoires à côté d'une longueur d'onde, δ' et δ pourront, dans cette équation, être censés se rapporter, à toute époque, aux mêmes particules matérielles; car celles qui, les unes pondérables, les autres éthérées, se trouvent actuellement en présence ou en action mutuelle, et figurent explicitement dans la formule, ont, très sensiblement, les mêmes δ et δ', ou encore les mêmes accélérations, que leurs voisines appelées à entrer en rapport à d'autres instants, ou venant de l'être.

Cette équation peut donc s'écrire $\frac{d^2}{dt^2}(\rho'\delta' - \alpha\rho\delta) = 0$, avec ρ', α et ρ, δ' et δ relatifs à des particules *contiguës dans l'état naturel ou de repos*. Alors multiplions-la deux fois successivement par dt, et intégrons chaque fois, en observant que les vitesses vibratoires $\frac{d(\delta', \delta)}{dt}$, ou les déplacements δ', δ comptés à partir des situations d'état naturel, ont débuté par la valeur zéro au moment où les ondes commençaient à atteindre la tranche considérée. Il viendra $\rho'\delta' - \alpha\rho\delta = 0$, ou bien

$$(12) \qquad \frac{\delta'}{\delta} = \alpha \frac{\rho}{\rho'} = \text{une constante } \varepsilon.$$

Le déplacement moyen δ' des molécules garde donc un rapport constant ε au déplacement même de l'éther. D'où il suit que ce rapport ε reste bien indéfiniment très petit, comme on l'avait annoncé, pourvu que le coefficient numérique α n'approche pas des valeurs énormes (10^{12} au moins) exprimant combien de fois la densité ρ' du corps pondérable contient celle, ρ, de l'éther.

Si l'on supposait que les mouvements produits à l'endroit (x, y, z), au lieu d'être récents, c'est-à-dire de s'y être propagés d'ailleurs, fussent sensiblement périodiques autour de la situation moyenne (x, y, z), la même formule (12) aurait lieu. Car l'équation $\frac{d^2}{dt^2}(\rho'\delta' - \alpha\rho\delta) = 0$ donnerait, pour la diffé-

Digitized by Google

rence $\rho'\delta' - \alpha\rho\delta$, une expression de la forme $A + Bt$, dont la valeur moyenne ne s'annulerait, comme on l'admet, qu'aux deux conditions $B = 0$, $A = 0$.

Ainsi, le coefficient α pourra grandir jusqu'à réduire dans de très grands rapports la vitesse de propagation ω, et même, ce semble, jusqu'à mettre en défaut nos équations aux dérivées partielles, en abaissant la longueur d'ondulation λ à l'ordre de petitesse des intervalles moléculaires, avant que les déplacements δ' de la matière pondérable, *provoqués* par ceux δ de l'éther, leur deviennent comparables.

Mais nous avons admis que chaque molécule pondérable se comportait comme si elle était soustraite à l'action des autres; et il nous reste à justifier cette supposition *pour les corps transparents ou diathermanes.*

Essayons d'appliquer à l'ensemble des molécules, c'est-à-dire aux particules pondérables isotropes dont δ' désigne les très petits déplacements vibratoires simultanés à ceux de l'éther, des raisonnements pareils à ceux qui, dans la dernière leçon (p. 46), nous ont donné le terme $\mu\frac{d^2\delta}{dx^2}$ comme résultante des actions élastiques sur l'unité de volume de l'éther vibrant. Nous reconnaîtrons ainsi que, sur l'ensemble des molécules occupant une unité du volume apparent du corps, l'action totale de la matière pondérable ambiante serait exprimée par $\mu'\frac{d^2\delta'}{dx^2}$, μ' étant le coefficient de l'élasticité de glissement de ce corps, si les longueurs des ondes lumineuses étaient comparables aux longueurs des ondes sonores. Mais elles sont tellement plus courtes et, par suite, tellement peu au-dessus (quant à l'ordre de grandeur) du rayon d'activité des actions moléculaires, qu'il est difficile de supposer uniformes, de part et d'autre d'un élément plan, les déformations de la couche productrice de sa pression : d'où résulte l'inapplicabilité, au cas présent, de l'expression $\mu'\frac{d^2\delta'}{dx^2}$. A défaut de mieux, employons toutefois celle-ci, mais en la supposant seulement comparable (et non égale) à la quantité cherchée : ce qui suffira à notre raisonnement [1].

---

[1] Même quand il est fluide, un corps a toujours une élasticité de glissement, pour d'imperceptibles déformations se produisant avec une rapidité qui ne laisse

Digitized by Google

Nous admettrons donc que la formule $\mu' \frac{d^2\delta'}{dx^2}$ exprime, à un facteur correctif près, la force qu'il faudra joindre à l'action $\mathfrak{R} = \alpha\rho \frac{dV}{dt} = \alpha\rho \frac{d^2\delta}{dt^2}$ de l'éther ambiant sur la même unité de volume des corps pondérables, pour avoir la force motrice totale $\rho' \frac{d^2\delta'}{dt^2}$ de celle-ci. Et nous avons à reconnaître que $\mu' \frac{d^2\delta'}{dx^2}$ égale une fraction très petite de $\mathfrak{R}$, c'est-à-dire du produit $\alpha\rho \frac{d^2\delta}{dt^2}$.

D'ailleurs celui-ci peut être remplacé par un autre plus analogue à $\mu' \frac{d^2\delta'}{dx^2}$. En effet, tant que δ' est encore très petit par rapport à δ, on a, pour régir δ, l'équation (11) ci-dessus, qui donne au terme $\alpha\rho \frac{d^2\delta}{dt^2}$ la valeur $\frac{\alpha}{1+\alpha} \mu \frac{d^2\delta}{dx^2}$, du même ordre que $\mu \frac{d^2\delta}{dx^2}$ (car α est, dans tout corps à densité sensible, pour le moins comparable à l'unité); et l'on peut admettre qu'il en sera ainsi, *quant à l'ordre de grandeur des termes,* même longtemps après que cette équation serait devenue inexacte. Il nous reste donc à faire voir que le produit $\mu' \frac{d^2\delta'}{dx^2}$ est très petit, dans tous les corps transparents ou diathermanes, devant $\mu \frac{d^2\delta}{dx^2}$.

Pour cela, observons que la poussée $\mathfrak{R}$ de l'éther sur la matière pondérable, si elle ne constitue pas toujours, à elle seule, la presque totalité de la force motrice $\rho' \frac{d^2\delta'}{dt^2}$ de celle-ci, en est cependant toujours une partie notable, tant que les déplacements δ' de cette matière et, par suite, ses déformations sont encore assez faibles pour ne donner que peu de prise à ses réactions élastiques. Donc, du moins dans une première et assez longue partie du phénomène, les deux termes $\rho' \frac{d^2\delta'}{dt^2}$, $\alpha\rho \frac{d^2\delta}{dt^2}$ sont continuellement du même ordre de grandeur; et, multipliés deux fois successivement par dt, puis intégrés chaque fois à partir du début du mouvement à l'endroit considéré, ils conduisent à deux intégrales, $\rho'\delta'$, $\alpha\rho\delta$, en général

---

pas aux particules fluides le temps de rétablir leur parité naturelle de constitution en tous sens. Ainsi le coefficient μ' existera ou différera de zéro, même dans les fluides.

Digitized by Google

comparables entre elles, tant qu'il n'y a pas eu assez de périodes τ écoulées, ou assez de neutralisations d'éléments, les uns positifs, les autres négatifs, dans ces intégrales, pour rendre leur rapport d'un ordre de grandeur autre, en général, que celui des sommes absolues de leurs éléments respectifs. Alors le rapport, qui est à apprécier, de $\mu' \frac{d^2\delta'}{dx^2}$ à $\mu \frac{d^2\delta}{dx^2}$, évidemment comparable à $\frac{\mu'}{\mu}\frac{\delta'}{\delta}$ ou à $\frac{\mu'}{\mu}\frac{\alpha\rho}{\rho'}\frac{\rho'\delta'}{\alpha\rho\delta}$, est de l'ordre de $\frac{\mu'}{\mu}\frac{\alpha\rho}{\rho'}$, puisque $\rho'\delta'$ et $\alpha\rho\delta$ sont comparables entre eux.

La même conclusion subsiste, quand il s'agit de mouvements non plus récents, mais devenus sensiblement périodiques, de périodes, τ pour l'éther et τ' pour la matière pondérable, pouvant même être différentes, pourvu que leur rapport soit fini. Car les expressions $\rho' \frac{d^2\delta'}{dt^2}$ et $\alpha\rho \frac{d^2\delta}{dt^2}$, supposées comparables entre elles, sont alors (d'après ce qu'on a vu p. 58) respectivement des ordres de grandeur de $\rho' \frac{16\delta'}{\tau'^2}$ et de $\alpha\rho \frac{16\delta}{\tau^2}$.

Mais rappelons (p. 53) que les ondes transmises dans la matière de densité ρ par l'élasticité à coefficient μ, se propagent avec une vitesse ω exprimée par $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$, et qui est la vitesse de la lumière; en sorte que $\mu = \omega^2\rho$. De même, dans la matière pondérable, si on lui fait rendre des sons transmis par l'élasticité à coefficient μ', ou qu'on la sollicite directement à exécuter des vibrations transversales, la vitesse de propagation ω' de ces sons sera $\sqrt{\frac{\mu'}{\rho'}}$; ce qui donne $\mu' = \omega'^2\rho'$. Avec ces valeurs de μ et de μ', le rapport $\frac{\mu'}{\mu}\frac{\alpha\rho}{\rho'}$, dont il s'agit de prouver l'extrême petitesse, devient enfin

$$(13) \qquad \alpha\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2.$$

Or, la vitesse ω de la lumière dans l'éther est environ de $300000 = 3 \times 10^5$ kilomètres, tandis que celle, ω', des sons transversaux dans les corps est de l'ordre de 1 kilomètre seulement.

La fraction $\frac{\omega'^2}{\omega^2}$ peut donc être remplacée par un nombre

Digitized by Google

comme $\frac{1}{9.10^{10}}$, ou par $\frac{1}{10^{11}}$; et le rapport (13) devient, sans erreur sur son ordre de petitesse, $\frac{\alpha}{10^{11}}$.

Ce résultat resterait encore fort petit, quand bien même l'inexactitude de l'expression $\mu' \frac{d^2\delta'}{dx^2}$, qui a été admise, faute de mieux, pour l'action moléculaire totale par unité de volume, obligerait de l'élever dans une très notable proportion. Et c'est probablement ce qu'il faudra faire, du moins dans le cas de corps ou solides, ou liquides. Car, avec des longueurs d'onde aussi courtes que celles des radiations lumineuses ou calorifiques, et, par suite, avec les déformations non uniformes qui en résultent dans l'intérieur de la couche mince où se produit la pression exercée sur un élément plan, les attractions et les répulsions dont se compose celle-ci ne doivent pas, dans ces corps, se neutraliser, à beaucoup près, autant qu'elles le font non seulement à l'état naturel, mais même dans un état de déformation uniforme; en sorte que la résultante des actions moléculaires sur l'unité de volume de la matière pondérable y excède sans doute fortement $\mu' \frac{d^2\delta'}{dx^2}$. Toutefois, l'expression (13) est d'un degré de petitesse tel, qu'il semble impossible qu'elle ne reste pas encore minime, même après avoir été corrigée à raison de la circonstance dont il s'agit.

33. **Deuxième et principale condition nécessaire pour la transparence ou la diathermanéité : les forces élastiques de la matière pondérable ne doivent pas accroître peu à peu les déplacements de ses molécules.** — Ainsi, dans tous les cas où le nombre α n'est pas tellement grand, qu'il rende la longueur d'ondulation comparable aux intervalles moléculaires ou la propagation impossible par ondes continues, les actions mutuelles des molécules paraissent bien devoir rester négligeables à côté des impulsions de l'éther sur elles, *mais à la condition de ne pas accroître peu à peu les petits déplacements de ces molécules, jusqu'à un ordre de grandeur plus élevé que ce qu'ils sont par l'effet des impulsions seules.*

On sait qu'un pareil accroissement des déplacements moléculaires aurait lieu, si les molécules tendaient, par le fait de leurs

Digitized by Google

actions mutuelles, à exécuter des vibrations synchrones à celles de l'éther, ou, d'une manière plus générale, si les impulsions de ce dernier se produisaient, en moyenne, aux moments et dans les sens voulus, pour accroître des vitesses maxima et des amplitudes déjà conservées à très peu près, d'une oscillation à l'autre, par les actions mutuelles seules. Ce serait sans doute possible grâce aux actions entre les molécules les plus voisines, actions devenues de beaucoup prépondérantes par suite de la faible épaisseur λ de chaque onde et des variations, relativement les plus accusées, qui en résulteraient pour les plus faibles distances intermoléculaires, à travers lesquelles s'exercent les forces le plus rapidement changeantes avec la distance.

Chaque molécule pondérable n'étant, dans ces conditions, sollicitée fortement par aucune autre que par les plus proches de ses voisines, ses distances à celles-ci dans les divers sens, peut-être même leurs dimensions ou celles de leurs groupements, seraient autant d'éléments nouveaux, de variables distinctes, dont le phénomène dépendrait, et propres à favoriser ou à contrarier la communication des petits mouvements ayant certaines périodes, plutôt que celle des autres. C'est ainsi que disparaîtrait l'indifférence ou l'égale aptitude du milieu, supposé de dimensions indéfinies, à propager des ondes de toutes les longueurs; car cette propriété d'indifférence n'existe que dans la limite où l'on peut regarder le milieu indéfini dont il s'agit comme composé de particules infiniment voisines, exerçant entre elles des actions mutuelles d'un rayon d'activité infiniment court.

On conçoit donc que, pour certains rapports entre la constitution moléculaire du corps et la période vibratoire donnée de l'éther, le produit $\rho'\delta'$ puisse devenir à la longue, c'est-à-dire au bout d'un certain nombre de périodes, incomparablement plus grand en valeur absolue moyenne que le produit $\alpha\rho\delta$. La démonstration précédente tombe alors en défaut et la propagation du mouvement dans l'éther du corps n'obéit plus à des lois aussi simples. Mais il est clair que le corps, absorbant l'énergie des ondes, a cessé d'être transparent ou diathermane : il sort du cas auquel nous nous bornons en ce moment.

Digitized by Google

34. Formes diverses de l'équation du mouvement; rapports des quantités de mouvement et des forces vives, dans l'éther et dans la matière pondérable vibrant ensemble lumineusement. — En résumé, l'équation approchée du mouvement vibratoire de l'éther, dans tout corps transparent ou diathermane, a la forme simple (11) (p. 62), avec α sensiblement constant et comparable à l'unité. Les deux relations données ci-dessus (p. 66),

$$\frac{\alpha\rho}{\rho'} = \frac{\delta'}{\delta} = \varepsilon, \tag{14}$$

permettent de l'écrire encore sous les deux formes

$$(\rho + \varepsilon\rho')\frac{d^2\delta}{dt^2} = \mu\frac{d^2\delta}{dx^2}, \qquad \rho\frac{d^2\delta}{dt^2} + \rho'\frac{d^2\delta'}{dt^2} = \mu\frac{d^2\delta}{dx^2}; \tag{15}$$

et celles-ci montrent, on l'a déjà dit, que le mouvement vibratoire se fait, dans l'éther d'un corps transparent, comme si la masse ρ d'éther, mue par l'action élastique $\mu\frac{d^2\delta}{dx^2}$, entraînait une surcharge $\varepsilon\rho'$, représentant la matière pondérable ρ', en tant que l'éther lui communique l'imperceptible fraction ε de ses déplacements.

Il se produit là un phénomène analogue à celui d'une corde vibrante, autour de laquelle on aurait enroulé un grand nombre de fois un fil massif sans tension, incapable dès lors de développer dans le mouvement aucune réaction élastique, mais alourdissant de toute sa masse la corde centrale (ou *axiale*) obligée de l'entraîner avec elle. Seulement, tandis qu'alors la surcharge subirait en totalité le déplacement de la substance active tenue de la charrier, elle n'en effectue qu'une partie presque infinitésimale dans le cas des molécules d'un corps transparent ébranlées par l'éther [1].

Le nombre α, quotient de $\rho'\delta'$ par $\rho\delta$ ou, évidemment, de $\rho'\frac{d\delta'}{dt}$

---

[1] On verra, au n° 5 de la note finale II (Tome second), comment, dans le cas d'un corps hétérotrope, où la matière pondérable offrira des résistances inégales à l'éther suivant les divers sens et y prendra, par suite, des fractions différentes de sa quantité de mouvement, il en résultera pour l'éther trois accroissements fictifs *distincts* de la densité ρ, suivant trois directions *principales* : ce qui explique le plus simplement possible les lois de Fresnel sur la double réfraction, sauf la quasi-transversalité, au lieu de la transversalité parfaite admise par Fresnel, et sauf la perpendicularité des vibrations, tout à la fois, au rayon lumineux et au plan de polarisation, comme le demandent les physiciens.

Digitized by Google

par $\rho \frac{d\delta}{dt}$, représente, comme on voit, *le rapport de la quantité de mouvement prise par la matière pondérable à celle qu'a gardée l'éther. Ce rapport* est donc *comparable à l'unité, dans un corps transparent vibrant lumineusement.* Mais celui des demi-forces vives, $\frac{\rho'}{2}\left(\frac{d\delta'}{dt}\right)^2$ et $\frac{\rho}{2}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2$, en est le produit par $\frac{\delta'}{\delta}$, ou par ε, et vaut ainsi $\alpha\varepsilon = \alpha^2 \frac{\rho}{\rho'}$, où $\frac{\rho}{\rho'}$ est au plus comparable, comme on a vu (p. 34), à $\frac{1}{10^{12}}$. Donc, *la matière pondérable ne reçoit de l'éther, dans le phénomène du rayonnement à travers un milieu diathermane, que des quantités d'énergie actuelle ou de chaleur sensible absolument négligeables.*

C'est bien ce qu'il fallait pour que la transmission pût se faire sans absorption ni dissémination appréciables, du moins sous des épaisseurs de quelques longueurs d'onde.

Digitized by Google

CINQUIÈME LEÇON.

DE L'AGITATION CALORIFIQUE, TELLE QU'ELLE NAIT, DANS LES CORPS ATHERMANES, DE L'ACCOURCISSEMENT ET DU RALENTISSEMENT PRESQUE INFINIS DES ONDES DE L'ÉTHER.

35. Disparition, dans les corps athermanes, de la propagation uniforme des ondes. — Abordons enfin la partie la plus épineuse de notre tâche, en nous demandant ce que deviendront les ondes de lumière ou de chaleur rayonnante, si elles pénètrent, d'un milieu transparent ou diathermane, dans un corps susceptible de prendre largement part aux excursions vibratoires de l'éther. D'après ce que nous avons vu (p. 64 et 70), cela peut arriver par l'effet de deux circonstances très différentes, dont chacune entraîne l'*opacité* ou l'*athermanéité* du corps pour les ondes de la période supposée, c'est-à-dire l'extinction de celles-ci sous des épaisseurs insensibles (ne comprenant qu'un petit nombre de longueurs d'ondulation), avec transformation du mouvement ondulatoire en d'autres mouvements moins simples. Les circonstances dont il s'agit consistent dans la non-vérification des deux conditions de transparence, signalées, l'une, au n° 31, l'autre, au n° 33.

La première de ces conditions de transparence (p. 64) ferait défaut, même sans l'intervention des actions moléculaires de la matière pondérable, si le rapport α de la quantité de mouvement prise dès les premières vibrations par les molécules pondérables, à celle que garde l'éther ambiant, était assez grand pour réduire la longueur d'onde λ (inverse de $\sqrt{1+\alpha}$) au point de la rendre comparable aux intervalles moléculaires et de ne plus laisser, par suite, au système, une continuité suffisante pour la transmission régulière des ondes. Il est vrai que le nombre α devrait alors atteindre des valeurs

Digitized by Google

énormes, peu vraisemblables si l'on songe qu'elles se produiraient dès les premiers instants du phénomène.

Mais il n'en est pas de même de la seconde condition (p. 70) exigeant, pour la transparence, que les réactions intermoléculaires, nées du mouvement communiqué par l'éther à la matière pondérable, ne tendent pas à conserver ce mouvement et, par suite, à l'accroître avec le concours, sans cesse renouvelé, des impulsions de l'éther. On conçoit que cette condition fasse assez souvent défaut et qu'alors les déplacements des molécules s'amplifient peu à peu, jusqu'à atteindre l'ordre de grandeur de ceux de l'éther.

Dans les deux cas, le mouvement cessera d'être *ondulatoire* pour devenir une *agitation* irrégulière. Il perdra le caractère si remarquable des ondes proprement dites ou de *translation*, qui consiste dans leur propagation *uniforme* exprimée par la formule $\delta = f(x - \omega t)$, c'est-à-dire dans la permanence des phénomènes se produisant tout autour d'un observateur fictif animé de la vitesse même ω de la propagation. Ce caractère, quand il se réalise pour toute forme de la fonction f, tient en effet aux *trois* propriétés, qu'a l'équation du mouvement en δ, d'être *linéaire, homogène* quant à l'ordre des dérivées de δ en x ou en t qui y figurent, et, enfin, à coefficients *constants*.

Or la troisième propriété disparaît avec la parité des éléments de volume composant le milieu et censés pris de dimensions infiniment petites par rapport à la longueur d'onde λ, savoir, dans le premier cas, où fait défaut la transparence par l'amoindrissement de λ jusqu'à l'ordre des intervalles moléculaires.

La deuxième propriété disparaît à son tour dans le second cas, par l'apparition de déplacements de la matière pondérable comparables à ceux, δ, de l'éther, et l'entrée en action de forces moléculaires, finalement prépondérantes, d'un rayon d'activité trop grand, par rapport à λ, pour permettre de réduire à un terme en $\frac{d\delta}{dx}$ l'action mutuelle de deux couches contiguës. Si, en effet, les forces élastiques de la matière pondérable pouvaient propager des ondes *continues, régulières,* à aussi courte période τ que les ondes lumineuses ou calorifiques, celles-ci ne seraient, sans doute, pas séparées des ondes sonores comme par un abîme; et l'on observerait vraisemblablement dans les corps, sinon par l'ouïe, du moins

Digitized by Google

par d'autres moyens d'expérimentation, des périodes vibratoires de *tous* les degrés de petitesse jusqu'au quatrillionième de seconde. Le rayon d'activité de ces forces élastiques doit comprendre un assez grand nombre d'intervalles moléculaires pour rendre impossible (p. 35 à 37) la transmission d'aussi courtes ondes.

36. Les équations du mouvement n'y sont même plus linéaires. — Enfin, même la première propriété, c'est-à-dire la forme linéaire des équations du mouvement, disparaît aussi, pour peu que s'accroissent dans le corps la demi-force vive des molécules pondérables et, par conséquent, leurs excursions *à grandes différences de phase entre points voisins*. Car la petitesse extrême des intervalles moléculaires doit rendre bientôt comparables à ceux-ci l'amplitude des vibrations et, par suite, dans le cas considéré d'ondes très courtes, le déplacement relatif des points matériels que séparent ces intervalles. Dès lors, les actions moléculaires les plus grandes et les plus influentes, savoir, celles qui s'exercent à travers les intervalles en question, cessent d'avoir leurs variations d'un instant à l'autre, auxquelles revient le principal rôle dans la réaction dynamique, proportionnelles aux changements des distances correspondantes, ou, par suite, à la dérivée $\frac{d\delta}{dx}$.

Cette disparition de la forme linéaire se produit d'ailleurs dans tout système matériel soumis, comme celui des molécules pondérables considérées ici, à des actions extérieures tendant à accroître des vibrations entretenues déjà par ses propres actions intérieures. Car on sait que les vibrations grandissent alors jusqu'à l'entrée en jeu des termes *non linéaires* des formules exprimant ces actions intérieures, termes par conséquent indispensables pour *limiter* les amplitudes [1]. Ainsi les équations de mouvement de la matière pondérable et, par répercussion, celles de l'éther dans notre corps

[1] *Voir*, par exemple, dans le Tome II de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (*Calcul intégral*, Partie élémentaire, p. 226), le cas où l'égalité de période des oscillations naturelles d'un corps avec les actions extérieures qui le sollicitent, met en défaut l'équation linéaire approchée du phénomène et empêche le *régime* de celui-ci d'être réglé par cette équation simple.

Digitized by Google

athermane, qui leur sont adjointes ou simultanées, finissent par n'être plus linéaires.

En même temps s'évanouissent toutes les propriétés du mouvement ondulatoire dues à la forme linéaire des équations, notamment le fait capital de la composition de plusieurs systèmes d'ondes par une simple superposition des déplacements qu'ils produisent, et l'indépendance mutuelle que ces systèmes conservaient dans le milieu malgré leur mélange, chacun d'eux continuant à s'y comporter, pour son propre compte, comme s'il était seul.

37. **Ce que serait la chaleur des corps, si leurs molécules étaient assez nombreuses, et leurs actions élastiques exercées d'assez près, pour y assurer la continuité des ondes.** — L'agitation calorifique naît donc des ondes de chaleur rayonnante par la disparition de tous les caractères qui font la simplicité relative des mouvements ondulatoires et en rendent le calcul abordable. Dans de pareilles conditions, il est clair que ses détails seront trop *rebelles à notre analyse* pour que nous devions même tenter d'en faire une simple ébauche. Nous montrerons seulement ce qu'on aurait à la place de l'agitation calorifique, si le rayon d'activité des actions moléculaire était assez court, et les molécules pondérables assez rapprochées, pour que la demi-force vive pût se communiquer largement à ces molécules sans perdre son caractère ondulatoire. On verra ainsi que ce n'est pas précisément la coexistence de déplacements distincts et *comparables* δ, δ' des deux espèces de matière, qui fait obstacle à la propagation des ondes, avec conservation de leur période τ, mais bien l'inimaginable petitesse qu'atteindrait la longueur λ des ondulations dans la matière pondérable si cette propagation régulière avait lieu, petitesse en supposant une autre bien plus grande, et qui n'existe justement pas, dans le rayon d'activité des actions moléculaires.

La réaction mutuelle entre la matière pondérable et l'éther étant censée avoir encore, par unité de volume, l'expression admise $\alpha\rho\frac{dV}{dt}$, où V est leur vitesse relative $\frac{d(\delta-\delta')}{dt}$, l'on aurait évidemment, comme équations du mouvement de l'éther et de la matière pondérable,

$$(16)\quad \rho\frac{d^2\delta}{dt^2} = \mu\frac{d^2\delta}{dx^2} - \alpha\rho\frac{d^2(\delta-\delta')}{dt^2}, \qquad \rho'\frac{d^2\delta'}{dt^2} = \mu'\frac{d^2\delta'}{dx^2} + \alpha\rho\frac{d^2(\delta-\delta')}{dt^2},$$

Digitized by Google

ou bien

$$(17)\quad \frac{\rho+\alpha\rho}{\mu}\frac{d^2\delta}{dt^2}-\frac{d^2\delta}{dx^2}=\frac{\alpha\rho}{\mu}\frac{d^2\delta'}{dt^2},\qquad \frac{\alpha\rho}{\mu'}\frac{d^2\delta}{dt^2}=\frac{\rho'+\alpha\rho}{\mu'}\frac{d^2\delta'}{dt^2}-\frac{d^2\delta'}{dx^2}.$$

Pour éliminer δ', portons, dans la seconde (17) différentiée deux fois en t et multipliée par $\frac{\alpha\rho}{\mu}$, la valeur de $\frac{\alpha\rho}{\mu}\frac{d^2\delta'}{dt^2}$ tirée de la première. Une réduction immédiate donnera ainsi l'équation du quatrième ordre, en δ,

$$(18)\quad \frac{\rho+\alpha\rho}{\mu}\frac{\rho'+\alpha\rho}{\mu'}\frac{d^4\delta}{dt^4}-\left(\frac{\rho+\alpha\rho}{\mu}+\frac{\rho'+\alpha\rho}{\mu'}\right)\frac{d^4\delta}{dt^2dx^2}+\frac{d^4\delta}{dx^4}=\frac{\alpha^2\rho^2}{\mu\mu'}\frac{d^4\delta}{dt^4}.$$

Or celle-ci est homogène quant à l'ordre des dérivées de δ et a bien son intégrale composée de solutions partielles de la forme voulue $\delta=f(x-\omega t)$, ou, ce qui revient au même et nous sera un peu plus commode, de la forme $\delta=f\left(\frac{x}{\omega}-t\right)$, solutions exprimant, chacune, un système d'ondes de translation. Car la substitution de $f\left(\frac{x}{\omega}-t\right)$ à δ dans (18) donne simplement l'équation du second degré, en $\frac{1}{\omega^2}$,

$$(19)\qquad \left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{\rho+\alpha\rho}{\mu}\right)\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{\rho'+\alpha\rho}{\mu'}\right)=\frac{\alpha^2\rho^2}{\mu\mu'}.$$

Le premier membre de celle-ci excède le second pour les deux valeurs particulières zéro, ∞ de $\frac{1}{\omega^2}$ et lui est, au contraire, inférieur pour les deux valeurs intermédiaires $\frac{1}{\omega^2}=\frac{\rho+\alpha\rho}{\mu}$ et $\frac{1}{\omega^2}=\frac{\rho'+\alpha\rho}{\mu'}$, dont la première sera évidemment plus petite que la seconde (p. 69). Les deux racines sont donc positives et extérieures à l'intervalle de ces deux dernières quantités. Nous les appellerons respectivement $\frac{1}{\omega_1^2}$ et $\frac{1}{\omega_2^2}$, avec ω_1, ω_2 positifs (pour fixer les idées) et $\omega_1>\omega_2$. Il y aura, par suite, quatre valeurs *distinctes* de ω, deux à deux égales et contraires, ou quatre solutions de la forme $f\left(\frac{x}{\omega}-t\right)$, qui, par leur superposition, donneront bien, avec les quatre fonctions arbitraires voulues, l'expression générale de δ.

Digitized by Google

Mais bornons-nous aux racines ω_1, ω_2 positives, c'est-à-dire au cas de mouvements propagés vers les x positifs. Prenons donc

$$(20) \qquad \delta = f\left(\frac{x}{\omega_1} - t\right) + \varphi\left(\frac{x}{\omega_2} - t\right),$$

ou, d'une manière plus concise, $\delta = f + \varphi$, f et φ étant deux fonctions arbitraires, dont la détermination ne pourra se faire, par les valeurs mêmes de δ données, par exemple, à l'entrée dans le milieu, qu'à une constante près $\pm$ C, prise avec un signe dans f et signe contraire dans φ. En effet, leur somme δ sera seule définie. Comme celle-ci était nulle, à l'endroit considéré, avant l'instant où les ondes l'ont atteint, notamment pour $t = -\infty$, on aura $f(\infty) + \varphi(\infty) = 0$; et si l'on détermine la constante C de manière à avoir séparément $f(\infty) = 0$, il viendra aussi $\varphi(\infty) = 0$. Ainsi nous pourrons prendre les fonctions f, φ nulles en chaque endroit aux époques antérieures à l'arrivée des ondes.

Cela posé, cherchons l'expression de δ'. La première équation (17) pourra aisément s'écrire

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\alpha\rho\delta'}{\mu} - \frac{\rho + \alpha\rho}{\mu}(f + \varphi) + \frac{f}{\omega_1^2} + \frac{\varphi}{\omega_2^2}\right] = 0,$$

ou bien, avec coefficients binomes entre parenthèses tous deux positifs,

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\delta' - \frac{\mu}{\alpha\rho}\left(\frac{\rho + \alpha\rho}{\mu} - \frac{1}{\omega_1^2}\right) f\left(\frac{x}{\omega_1} - t\right) + \frac{\mu}{\alpha\rho}\left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{\rho + \alpha\rho}{\mu}\right)\varphi\left(\frac{x}{\omega_2} - t\right)\right] = 0.$$

Multiplions cette équation deux fois successivement par dt et intégrons, chaque fois, à partir d'un instant où le repos régnait encore à l'endroit considéré. Comme, à cet instant, f, φ, δ' et leurs dérivées s'annulaient, il viendra

$$(21) \quad \delta' = \frac{\mu}{\alpha\rho}\left(\frac{\rho + \alpha\rho}{\mu} - \frac{1}{\omega_1^2}\right) f\left(\frac{x}{\omega_1} - t\right) - \frac{\mu}{\alpha\rho}\left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{\rho + \alpha\rho}{\mu}\right)\varphi\left(\frac{x}{\omega_2} - t\right).$$

Appelons $F\left(\frac{x}{\omega_2} - t\right)$ le produit $-\frac{\mu}{\alpha\rho}\left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{\rho + \alpha\rho}{\mu}\right)\varphi\left(\frac{x}{\omega_2} - t\right)$, et substituons, en conséquence, dans (20), à $\varphi\left(\frac{x}{\omega_2} - t\right)$ le quotient de $-F\left(\frac{x}{\omega_2} - t\right)$ par $\frac{\mu}{\alpha\rho}\left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{\rho + \alpha\rho}{\mu}\right)$, égal, d'après (19),

Digitized by Google

au produit de $-F\left(\frac{x}{\omega_2}-t\right)$ par $\frac{\mu'}{\alpha\rho}\left(\frac{1}{\omega_2^2}-\frac{\rho'+\alpha\rho}{\mu'}\right)$; et les formules (20), (21) prendront enfin la forme, symétrique en δ et δ',

$$(22)\quad \begin{cases} \delta = f\left(\frac{x}{\omega_1}-t\right) - \frac{\mu'}{\alpha\rho}\left(\frac{1}{\omega_2^2}-\frac{\rho'+\alpha\rho}{\mu'}\right)F\left(\frac{x}{\omega_2}-t\right), \\ \delta' = F\left(\frac{x}{\omega_2}-t\right) + \frac{\mu}{\alpha\rho}\left(\frac{\rho+\alpha\rho}{\mu}-\frac{1}{\omega_1^2}\right)f\left(\frac{x}{\omega_1}-t\right). \end{cases}$$

La seconde équation (17), dont il n'avait pas encore été question spécialement, se trouve, d'ailleurs, vérifiée par ces valeurs de δ et δ', qui la transforment simplement en l'équation (19), avec ω_1 à la place de ω. Les formules (22) constituent donc bien, pour le cas de mouvements transmis vers les x positifs, les intégrales définitives des équations posées (17).

En réalité, ρ et $\alpha\rho$ sont négligeables devant ρ', et $\frac{\rho}{\mu}$ est négligeable devant $\frac{\rho'}{\mu'}$; de sorte que, en particulier, le second membre de (19) peut être regardé comme nul à côté du dernier terme $\frac{\rho+\alpha\rho}{\mu}\,\frac{\rho'+\alpha\rho}{\mu'}$ du premier membre. Cette équation se dédouble donc très sensiblement en deux, donnant, l'une, $\frac{1}{\omega_1^2}=\frac{\rho+\alpha\rho}{\mu}$, ou ω_1 égal à la vitesse de propagation $\omega=\sqrt{\frac{\mu}{\rho+\alpha\rho}}$ de la lumière dans le corps traité comme transparent, et, l'autre, $\frac{1}{\omega_2^2}=\frac{\rho'+\alpha\rho}{\mu'}=\frac{\rho'}{\mu'}$, ou ω_2 égal à la vitesse $\omega'=\sqrt{\frac{\mu'}{\rho'}}$ des sons à vibrations transversales dans le corps. Or, les deux expressions $\frac{\mu'}{\alpha\rho}\left(\frac{1}{\omega_2^2}-\frac{\rho'+\alpha\rho}{\mu'}\right)$, $\frac{\mu}{\alpha\rho}\left(\frac{\rho+\alpha\rho}{\mu}-\frac{1}{\omega_1^2}\right)$ peuvent être remplacées, en vertu de (19), par les inverses de

$$\frac{\mu}{\alpha\rho}\left(\frac{1}{\omega_2^2}-\frac{\rho+\alpha\rho}{\mu}\right)=\frac{\mu}{\alpha\rho}\left(\frac{1}{\omega'^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)$$

et de

$$\frac{\mu'}{\alpha\rho}\left(\frac{\rho'+\alpha\rho}{\mu'}-\frac{1}{\omega_1^2}\right)=(\text{sensiblement})\,\frac{\mu'}{\alpha\rho}\left(\frac{1}{\omega'^2}-\frac{1}{\omega^2}\right),$$

inverses qui, vu les valeurs $\rho(1+\alpha)\omega^2$, $\rho'\omega'^2$ de μ, μ' et la peti-

Digitized by Google

tesse relative de ω' par rapport à ω, reviennent à $\frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{\omega'^2}{\omega^2}$ et à $\frac{\alpha\rho}{\rho'}$.

Nous aurons donc finalement, pour δ et δ', les formules très simples

$$(23)\qquad \begin{cases} \delta = f\left(\frac{x}{\omega} - t\right) - \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{\omega'^2}{\omega^2}\mathrm{F}\left(\frac{x}{\omega'} - t\right), \\ \delta' = \mathrm{F}\left(\frac{x}{\omega'} - t\right) + \frac{\alpha\rho}{\rho'}f\left(\frac{x}{\omega} - t\right). \end{cases}$$

Elles expriment la superposition de deux systèmes d'ondes, dont l'un, animé de la vitesse de propagation ω de la lumière, imprime aux molécules pondérables l'imperceptible fraction $\frac{\alpha\rho}{\rho'}$ des déplacements $f\left(\frac{x}{\omega} - t\right)$ de l'éther, et dont l'autre, animé de la vitesse ω' du son, imprime à l'éther des déplacements δ contraires à ceux, $\mathrm{F}\left(\frac{x}{\omega'} - t\right)$, de la matière pondérable, et qui en sont la fraction tout aussi insensible (quoique moins petite) $\frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2$. Le premier n'est donc autre que le système d'ondes lumineuses considéré dans la dernière leçon, ou calculé dans l'hypothèse de la transparence du milieu. Le second est, vu sa vitesse de propagation ω', un système d'ondes sonores, imperceptiblement modifié par la présence de l'éther, qui, beaucoup plus prompt à prendre et à transmettre le mouvement, se met à y vibrer avec une avance d'une demi-période sur les molécules pondérables, mais dans une proportion extrêmement faible quant à l'amplitude et encore plus faible quant à la demi-force vive ou à l'énergie.

38. **La chaleur des corps est de la chaleur rayonnante, condensée dans un rapport presque infini.** — Si l'on admet que les deux systèmes proviennent de radiations éthérées, d'une certaine période τ, entrées dans le corps du côté des x négatifs, la matière pondérable ne pourra évidemment y exécuter des vibrations comparables, pour l'amplitude, à celles de l'éther interposé, que si les deux fonctions F, f sont du même ordre de grandeur. Alors les vibrations, de période τ, se feront avec des vitesses également comparables dans les deux espèces de matière; et les demi-forces vives, ou énergies actuelles correspondantes de la matière pondérable et

Digitized by Google

de l'éther, seront entre elles, quant à leurs ordres de grandeur, comme les deux densités respectives ρ' et ρ. Les molécules pondérables auront donc emmagasiné une énergie actuelle pour ainsi dire infinie, comparativement à celle de l'éther du corps; et comme, en général, dans les systèmes vibrants, les transformations incessantes d'énergie actuelle en énergie potentielle, ou *vice versa,* assurent le même ordre de grandeur à ces deux fractions de l'énergie, il en résulte que l'énergie totale de l'ensemble formé par le corps et son éther se réduira très sensiblement à celle du corps seul, envisagé comme si l'éther ne le pénétrait pas.

Le gros du phénomène, sa partie capable d'impressionner vivement nos organes, consistera donc dans les rapides déplacements $\delta' = F\left(\frac{x}{\omega'} - t\right)$ de la matière pondérable; et la chaleur rayonnante, en venant se porter presque entièrement sur les molécules massives de cette matière, s'y sera condensée dans un rapport en quelque sorte infini. Or, c'est justement cette énorme *condensation de la chaleur rayonnante* dans les corps qui constitue la chaleur de ceux-ci, ou la *chaleur proprement dite,* en comparaison de laquelle la chaleur de l'éther est comme rien.

39. **Transformation des ondes en une agitation irrégulière, se propageant sans uniformité et beaucoup plus lentement que le son.** — Mais il est clair que la longueur d'onde $\lambda' = \tau\omega'$ de cette chaleur condensée, produit de la période vibratoire τ par la vitesse de propagation ω' du mouvement dans la matière pondérable, sera seulement la fraction $\frac{\omega'}{\omega}$ de la longueur d'onde même $\lambda = \tau\omega$ acquise dans le corps par la petite partie de chaleur restée rayonnante, ou produisant les vibrations $\delta = f\left(\frac{x}{\omega} - t\right)$ de l'éther, accompagnées de l'imperceptible tremblement $\delta' = \frac{\alpha\rho}{\rho'}\delta$ des molécules. Ainsi, dans notre analyse, la chaleur condensée ou proprement dite se montre constituée par des ondes incomparablement plus courtes que celles de la chaleur rayonnante, savoir, quelque chose comme 300000 fois plus. Or, déjà, le phénomène de la dispersion dans les corps transparents prouvait que les intervalles entre molécules et, à plus forte raison, le rayon d'activité des

Digitized by Google

actions moléculaires, sont un peu comparables aux longueurs d'onde λ des radiations éthérées. Donc, ils seront tout à fait de l'ordre des longueurs λ' d'ondulation de la chaleur proprement dite ou condensée. Et, dès lors, notre analyse apparaît absolument insuffisante; car elle suppose, dans le milieu moléculaire, une continuité qui n'y existe pas et, dans le mouvement étudié, une variation insensible des vitesses ou des phases entre points voisins, qui n'est nullement réalisée.

Ces défauts de continuité empêcheront évidemment la propagation régulière des ondes, c'est-à-dire la transmission du mouvement dans le sens des x positifs, avec une vitesse constante ω', comme ce qu'exprime la formule $\delta' = F\left(\frac{x}{\omega'} - t\right)$. Comment, en effet, le milieu pourrait-il offrir un aspect statique et dynamique permanent à un observateur animé de la vitesse convenable ω', quand l'ensemble des molécules constituant le théâtre sensiblement fixe des phénomènes est discontinu, et que l'observateur en question se trouve lui-même tantôt dans une molécule et tantôt dans un intervalle moléculaire? Il ne saurait, dès lors, être question de permanence, mais, tout au plus, d'une périodicité ayant comme période le temps employé par l'observateur à parcourir un intervalle moléculaire, supposé que l'espacement des molécules fût uniforme. Or, même ainsi entendue, une propagation régulière du mouvement cesse de répondre à rien de distinct, quand la demi-longueur d'onde s'abaisse jusqu'à ne plus valoir qu'un intervalle moléculaire. Car, alors, après chaque *pas* fait par l'observateur d'un intervalle à l'autre, les élongations δ' et les vitesses se trouvent être, partout, exactement le contraire de ce qu'elles étaient avant ce pas; de sorte que l'observateur percevrait autour de lui le même phénomène après tous les pas, soit en reculant vers les x négatifs, soit en avançant vers les x positifs. Il n'y a donc pas plus de propagation dans un sens que dans le sens contraire.

Avec une disposition irrégulière des molécules, et même sans cela, comme on voit, il n'y aura plus qu'une transmission de mouvement désordonnée, discordante et, par suite, beaucoup plus lente que celle du son, mais n'en assurant que mieux, par sa lenteur, la condensation, en chaleur, de l'énergie vibratoire sans

Digitized by Google

cesse introduite dans le corps. Les molécules n'agiront plus de concert, par groupes innombrables comme dans le cas du son ou de la lumière, pour ébranler leurs voisines non encore atteintes par les ondes; elles ne réussiront qu'à pousser ou à tirer en sens divers les plus proches d'entre elles, quoique le mouvement doive continuer à se communiquer peu à peu aux particules en repos, ou moins agitées que les autres, par suite des actions élastiques les reliant aux plus agitées. Le corps ne ressemblera plus, comme quand il était transparent, à un océan que sillonnerait une houle majestueuse et rapide, déroulant des vagues d'une longueur à perte de vue, et distantes d'intervalles λ assez grands pour permettre à leurs crêtes d'atteindre des hauteurs notables au-dessus de leurs creux, sans nuire à leur régularité et à leur continuité. Il ressemblera plutôt à une mer hachée par la tempête, c'est-à-dire couverte de vagues courtes, relativement trop hautes et trop aiguës pour ne pas déferler souvent, surtout quand elles se heurtent ou qu'elles *interfèrent* (s'ajoutent); vagues s'épuisant ainsi en efforts *locaux,* disloquant et rompant en tous sens le fluide (comme le prouve l'écume dont il se couvre en se mêlant à l'air dans le déferlement), mais presque immobiles ou sans propagation, faute d'impulsions d'*ensemble* capables d'ébranler à la fois et à l'instant de grandes masses liquides.

Telle sera donc l'agitation calorifique, désordonnée et confuse, ainsi que nous l'avons décrite dans la deuxième Leçon. Et comme les équations du mouvement perdront jusqu'à la forme linéaire (p. 76), il ne subsistera plus même la distinction des mouvements simples, caractérisés par leurs périodes respectives τ; car on sait que l'isochronisme des oscillations et la *conservation des périodes* tiennent, en général, dans un système matériel, à la forme *linéaire* des équations différentielles de son mouvement.

Digitized by Google

SIXIÈME LEÇON.

DEGRÉ DE L'AGITATION CALORIFIQUE, ÉVALUÉ PAR LES DILATATIONS QU'ELLE PRODUIT.

NOTION DE TEMPÉRATURE.

40. Du degré de l'agitation calorifique, considéré comme une variable propre à la définir. — Des trois qualités qu'offraient le son et la lumière, savoir, la hauteur ou la couleur, liée à la période τ dans les sons ou les lumières simples, le timbre ou la teinte, provenant des proportions des sons simples ou des radiations simples qui constituent le mouvement vibratoire proposé, enfin, l'intensité, liée à l'énergie totale, les deux premières auront disparu dans l'agitation calorifique, d'après ce qu'on a vu dans la Leçon précédente; et il restera seulement l'intensité, que mesurera en chaque endroit l'énergie vibratoire totale par unité de volume.

L'excès de confusion des mouvements, la multitude même de leurs détails, assez grande pour épuiser en quelque sorte la variété possible de leurs combinaisons, sans doute aussi, dans une large mesure, notre impuissance à discerner ces détails, produiront dans l'ensemble une sorte d'homogénéité de l'agitation calorifique; et de là naîtra une certaine simplicité relative du phénomène, sans laquelle il nous serait impossible d'en saisir les lois. Ne nous laissant reconnaître en lui aucun autre caractère que son intensité, son degré, il nous paraît ne pouvoir varier qu'en plus ou en moins.

Cette manière de voir est confirmée par l'analyse, telle que nous pouvons la faire, de la chaleur des corps, non pas en eux-mêmes, où elle est indistincte, mais dans les radiations qu'ils envoient à l'éther ambiant après avoir été chauffés. . . .

Digitized by Google

La presque totalité de la chaleur rayonnante qu'ils émettent est toujours obscure, c'est-à-dire à grandes périodes τ, relativement. Peut-être est-ce parce que les ondes un peu longues dans l'éther sont, seules, assez peu courtes dans les corps athermanes (vu leur période) pour pouvoir s'y propager, ne serait-ce qu'à travers l'épaisseur de leur imperceptible couche superficielle, et, issues ainsi d'une matière quelque peu profonde ou douée d'une certaine masse, pour avoir, à leur sortie dans l'éther ambiant, une intensité appréciable. Il est clair, en effet, que la chaleur d'une couche trop mince serait une source d'énergie insuffisante à les engendrer. C'est pour une raison pareille (du moins jusqu'à un certain point) que, sur mer, les houles assez longues ou à grande période peuvent, seules, franchir sans s'éteindre de grands espaces et, par suite, sortir des régions agitées où elles ont pris naissance, ou se dégager de leur confusion d'origine. Car leurs coefficients respectifs d'extinction sont en raison inverse des cinquièmes puissances des périodes; de sorte qu'elles se trouvent réduites à une même fraction de leur hauteur primitive, après des parcours proportionnels à ces cinquièmes puissances [1].

Quoi qu'il en soit, tous les corps chauds paraissent émettre à peu près dans les mêmes rapports ces radiations de grande longueur d'onde, qui constituent la presque totalité de l'énergie émanée d'eux; et, par suite, ils semblent bien, du moins à une première approximation, être le siège d'une agitation calorifique analogue.

A une approximation plus grande, on y voit cependant apparaître, à mesure que le degré s'élève, une faible proportion de radiations de plus en plus courtes, ou plus rapides, tenant sans doute à ce que l'agitation, devenue excessive, ne fait plus osciller seulement les molécules en bloc, dans les groupes moléculaires, mais ébranle aussi les atomes dans chaque molécule et réveille, même au sein de la matière pondérable, ces forces atomiques à court rayon d'activité, appropriées aux plus petites distances comme aux plus petits systèmes, qu'elles font vibrer extrêmement vite à la manière de pendules très courts. Grâce à l'exquise sensibilité

---

[1] *Voir* à ce sujet une Note du 8 juillet 1895 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXI, p. 85).

Digitized by Google

de notre rétine où parviennent ces radiations à si brève période, nous les percevons malgré leur faible intensité relative (sauf pourtant les plus courtes, dites *ultra-violettes*); et les corps, dès qu'ils les émettent, sont dits *lumineux* ou *incandescents*. Dans les gaz *très raréfiés* où font presque défaut les actions moléculaires et où, par suite, domine moins la chaleur *obscure* due à ces actions, les radiations à brève longueur d'onde prennent plus d'importance et constituent le spectre *à raies* de ces gaz, caractéristique de la composition de leurs molécules.

Donc, à une seconde approximation, l'agitation calorifique perd son homogénéité moyenne, quand son degré s'élève suffisamment. Mais, du moins dans les solides et les liquides, sa *qualité* paraît ne se modifier, même alors, qu'avec sa *quantité* ou, pour ainsi dire, en fonction de son degré; et *une seule variable,* qui est l'intensité ou le degré, continue, on le pense, à la définir assez bien, surtout dans chaque corps en particulier. Sous ce rapport, le phénomène, à force de confusion, est peut-être devenu plus simple que n'était le mélange d'ondes éthérées, à périodes, phases et amplitudes définies, qui lui a donné naissance.

41. Dilatation produite par l'agitation calorifique et pouvant en marquer le degré. — Mais comment apprécier, dans une particule donnée de matière, ce degré de l'agitation calorifique? Sera-ce au moyen de nos sensations de chaleur, si peu précises et si peu comparables entre elles, influencées qu'elles sont dans les plus larges limites par notre propre état intérieur, accidentel ou habituel? Évidemment non, s'il s'agit d'une évaluation numérique sérieuse. Il nous faut donc trouver dans la particule elle-même un effet de son agitation qui soit visible, *géométrique* et, partant, mesurable, propre, par conséquent, à servir d'échelle de graduation pour distinguer entre eux ou définir tous ses états de chaleur. Or un tel effet existe : c'est, en général, la dilatation cubique plus ou moins sensible de la particule, solide ou fluide; et il est dû justement à la circonstance qui rend le phénomène si compliqué dans ses détails et si rebelle à notre analyse, au fait que les équations du mouvement interne cessent d'être linéaires, dès que celui-ci se condense ou devient de la chaleur proprement dite.

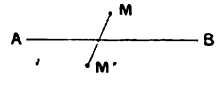
Digitized by Google

Pour comprendre comment un état vibratoire *imperceptible*, mais à phases notablement différentes pour les molécules les plus voisines, produit l'expansion de la particule, et dans une mesure pouvant être très étendue, rappelons que les actions moléculaires exercées aux distances insensibles sont de deux sortes : d'une part, aux moins petites de ces distances, des attractions, qui produisent la *cohésion* des solides; d'autre part, aux plus petites, des répulsions, chargées de conserver à la particule un certain volume ou de garantir son *impénétrabilité*, et, dès lors, beaucoup plus intenses, entre masses égales, que les attractions, mais, surtout, variant beaucoup plus vite quand la distance décroît. On sait, en effet, que la résistance des corps à la rupture n'est presque rien, en comparaison de leur résistance aux diminutions de volume.

Par conséquent, si, dans une particule en repos intérieur ou non agitée, et dont la surface est, par exemple, libre de toute pression, les molécules, ébranlées par l'éther ambiant ou par les vibrations d'une particule voisine, viennent à osciller calorifiquement de part et d'autre de leurs situations de repos, et qu'il survienne par suite, entre les molécules les plus voisines, soit des rapprochements, un peu comparables à leur distance primitive, soit des écartements, à peu près aussi nombreux et aussi grands, en moyenne, que les rapprochements, il s'en faudra de beaucoup que les actions, sans doute prépondérantes, exercées entre ces molécules *les plus rapprochées*, varient autant par les écartements que par les rapprochements, ou qu'elles donnent, dans le premier cas, des suppléments d'attraction compensant les énormes suppléments de répulsion produits par elles dans le second.

Cela étant, considérons dans notre particule l'élément plan quelconque AB, qui ne subissait aucune pression dans l'état primitif

Fig. 3.



de repos interne. Les attractions et les répulsions exercées, aux distances imperceptibles, par toutes les molécules, comme M, situées d'un même côté, sur les molécules, comme M', situées de l'autre, ne s'y neutraliseront plus suivant chaque axe; puisque

Digitized by Google

les répulsions auront beaucoup plus grandi par les rapprochements que ne l'auront fait les attractions par les écartements. Il faudrait, en général, pour que leur neutralisation continuât à subsister sensiblement, que le développement, en série, des actions intermoléculaires, suivant les variations Δr des distances correspondantes r, pût être réduit aux termes linéaires en Δr, et, de plus, que le développement des Δr en série, suivant les déplacements d'agitation ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' des points M, M', dont r est la distance, fût réductible lui-même aux termes du premier degré en ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', quantités moyennement nulles. Or la première, surtout, de ces réductions est rendue impossible par la grande rapidité de variation des répulsions mutuelles aux plus petites distances intermoléculaires; et de là résulte justement la non-linéarité des équations du mouvement calorifique (1).

Il y aura donc, sur tous les éléments plans de la particule, un excédent des répulsions, c'est-à-dire une *pression* notable; et comme cette pression intérieure, née de l'agitation calorifique, n'est pas supposée neutralisée, sur la surface de la particule, par une pression extérieure égale, un mouvement sensible d'expansion se produira, par l'écartement des *situations moyennes* des molécules jusqu'aux distances où se fera la neutralisation des attractions et des répulsions sur tout élément plan. Donc *la chaleur doit bien,* en général, *dilater les corps,* conformément à ce qu'indique l'expérience (2).

Observons l'importance capitale de ce phénomène, grâce auquel des mouvements *invisibles* de sens contraires peuvent se convertir, partiellement du moins, en un mouvement *visible* d'ensemble, ou

---

(1) Il va sans dire que, si l'on devait former ici les expressions précises des trois composantes de la pression exercée sur l'élément plan AB, l'on devrait aussi tenir compte des changements de direction que l'agitation calorifique fait subir sans cesse aux petites droites r de jonction, suivant lesquelles s'exercent les actions élémentaires constituant cette pression. Mais ce serait inutile pour notre but présent.

(2) Les mouvements vibratoires ne se font, en général, autour des situations *d'équilibre,* qu'autant que leurs équations sont réductibles à la forme linéaire; dès qu'ils prennent trop d'ampleur pour qu'on puisse négliger, dans ces équations, les carrés et produits des déplacements, les situations *moyennes* deviennent différentes de celles d'équilibre, comme on peut voir sur un exemple très simple dans le Tome II (*Calcul intégral,* Partie élémentaire, p. 228) de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique.*

Digitized by Google

translatoire, qui sera le déplacement de la portion de surface du corps dilaté, dont on ne gênera pas trop l'expansion. C'est ainsi qu'aura lieu le mouvement du piston dans les machines à feu, et que la chaleur produira du travail industriellement utilisable. Sans la dilatation par l'agitation calorifique, il n'existerait donc pas de *Thermodynamique,* c'est-à-dire que la chaleur n'aurait pas d'effet *mécanique,* au sens le plus usuel de ce dernier mot.

41 *bis*. **Possibilité de corps lumineux sans chaleur et de radiations irréfrangibles.** — Remarquons enfin que la dilatation des corps par la chaleur paraît tenir uniquement, comme on voit, aux actions intermoléculaires (et non interatomiques ou chimiques) mises en jeu par l'agitation. Elle ne fournit ainsi, pour apprécier le degré de cette agitation, un mode d'évaluation suffisant, qu'autant que les mouvements y ont (ou y ont acquis) des périodes comme celles de la chaleur rayonnante obscure, reconnue, vu le fait même de l'échauffement, capable d'exciter l'agitation intermoléculaire dont il s'agit.

Il est donc probable que ce mode d'évaluation tomberait en défaut, pour une agitation où domineraient des mouvements ayant les périodes, bien plus brèves, des radiations lumineuses ou, surtout, ultra-violettes, propres à faire vibrer des systèmes beaucoup plus petits que ne sont les *groupes* de molécules. Et la matière qui subirait une telle agitation serait beaucoup plus lumineuse que chaude, si ses vibrations, principalement *atomiques* dès lors, et d'amplitudes proportionnées aux dimensions des molécules où elles auraient leur siège, ne donnaient pas, peu à peu, en modifiant les actions entre molécules pour mêmes distances r de leurs centres de gravité, naissance à des déplacements bien plus larges de ces molécules elles-mêmes, les unes par rapport aux autres. Or rien ne dit que cette transformation du mouvement, ainsi devenu, d'atomique, moléculaire, doive se produire toujours. De là résulte donc la possibilité de corps tout à la fois *lumineux* (ou à radiations chimiquement actives sur les substances photographiques) et *froids,* c'est-à-dire incapables de dilater les corps qui les touchent, ou sans action sur le *thermomètre*.

Et ils seront *froids* aussi pour nos organes; car la sensation *propre* de chaleur semble être en corrélation étroite avec la *tem-*

Digitized by Google

pérature ou *dilatation* thermométrique. Elle serait donc bien due à l'imperceptible agitation constituée par les rapides déplacements des molécules de nos nerfs les unes par rapport aux autres, plutôt qu'à des vibrations intérieures de ces molécules considérées isolément.

D'ailleurs, dans le mouvement atomique dont il vient d'être question, à très courtes périodes et à effets soit lumineux, soit chimiques, les molécules pourront se communiquer mutuellement leur agitation intérieure par l'intermédiaire de l'éther, dont l'impulsion, inégale sur leurs diverses parties, les fera vibrer. Car les petits déplacements d'ensemble δ' étudiés au n° 32 (p. 66), et qui s'y trouvent évalués dans l'hypothèse de molécules à dimensions très petites devant une longueur d'onde, ne constituent pas tout l'effet de cette impulsion : ils ne sont que son effet *résultant* ou moyen, susceptible même de s'annuler sensiblement quand la longueur des ondes de l'éther n'excède plus les dimensions d'une molécule, et que divers éléments de l'impulsion sont de signes contraires. Et l'on voit qu'alors, s'il était encore permis de choisir, pour poser l'équation approchée du mouvement, des éléments de volume comprenant plusieurs molécules pondérables, on aurait

$$A = 0, \qquad \alpha = 0,$$

dans les formules (8) à (15) (p. 58 à 72).

La quasi-neutralisation des éléments de l'impulsion totale de l'éther sur une molécule deviendrait même inévitable, pour des longueurs d'ondulation qui s'abaisseraient jusqu'à n'être plus qu'une petite fraction des dimensions de la molécule, comme s'annule sensiblement, sur une mer agitée, l'impulsion d'ensemble que subit, de la part des vagues, un très grand navire, assez étendu pour en recouvrir toujours plusieurs. Il semble donc que le corps soumis à l'action de telles ondes très courtes devra, à part les pouvoirs absorbant et rayonnant de ses molécules, avoir comme équation *approchée* du mouvement de son éther l'équation (11) (p. 62), prise avec $\alpha = 0$, ou devenue identique à l'équation de mouvement de l'éther libre. Par suite, ces radiations ultra-courtes ne se *réfracteront* pas en pénétrant dans les corps, ni, dès lors, ne se réfléchiront *régulièrement* à leur surface; et,

Digitized by Google

d'ailleurs, leurs phénomènes de diffraction se déroberont à l'observation, en raison de l'excessive petitesse des longueurs d'onde [1].

Les considérations précédentes ne fournissent, il est vrai, qu'une induction; car elles négligent les effets locaux des molécules pondérables, les éléments de volume ayant été pris beaucoup trop grands pour l'étude d'ondes aussi courtes. Mais l'emploi d'éléments de volume mieux en rapport, par leur extrême petitesse, avec cette *brièveté* des ondes (dans l'espace), laisse subsister les mêmes résultats. D'une part, les intervalles moléculaires se comportent alors, relativement, comme de grandes étendues occupées par de l'éther libre, et où les ondes obéissent aux équations de mouvement de cet éther. D'autre part, les molécules pondérables deviennent des sortes d'écrans, très clairsemés, interceptant, pour le transformer, le mouvement qui leur arrive, mais laissant passer autour d'eux le *gros des ondes,* sans pouvoir changer, dans un sens quelconque plutôt que dans un autre opposé, l'orientation générale de leurs *plans.*

42. Principe de l'équilibre de température et possibilité d'une échelle thermométrique commune à tous les corps. — Dans la plupart des corps et surtout dans les solides, un échauffement ou un refroidissement modérés ne produisent, sous pression extérieure constante, que des changements de volume extrêmement faibles, dont la simple constatation exige des dispositifs délicats. La fixation de leur degré relatif d'agitation calorifique resterait donc un problème hérissé de difficultés pratiques, s'il fallait mesurer leurs imperceptibles variations de volume. D'ailleurs, on ne pourrait comparer de la sorte, pour en établir la série croissante ou décroissante, que les intensités d'agitation du corps expérimenté; et il y aurait autant d'*échelles d'intensité* indépendantes que d'espèces de corps. Heureusement, une loi physique fondamentale, dite *principe de l'équilibre de température,* vient simplifier la question au plus haut point, en permettant de faire servir un seul corps, appelé *thermomètre,* à l'évaluation de l'état calorifique de tous, et en éta-

[1] Les rayons de Röntgen ne seraient-ils pas justement constitués par de telles radiations, comme l'ont pensé plusieurs physiciens?

Digitized by Google

blissant ainsi, pour tous les corps, une échelle commune des degrés d'intensité, qu'on peut même conserver sans changement quel que soit le thermomètre choisi. Expliquons en quoi consiste cette loi.

Comme tout corps agité ébranle plus ou moins vite ses voisins, supposés d'abord en repos, de même, un corps chauffé communique une partie de sa chaleur, c'est-à-dire de son agitation, à ceux qui le touchent, tant que ceux-ci sont froids ou à l'état de repos interne, et même, évidemment, tant que leur degré d'agitation n'atteint pas une certaine limite, d'autant plus élevée que l'est lui-même le degré d'échauffement du corps chaud. Cet ébranlement interne croissant du corps froid, par le corps chaud qui le touche, est d'ailleurs un phénomène relativement *lent,* où n'intervient pas d'une manière appréciable l'influence de la vitesse acquise, c'est-à-dire où sont à peu près réglés et uniformisés sans cesse les états d'agitation des particules en présence (sauf au début, durant un instant très court). Par suite, la cession du mouvement interne s'arrête dès que la limite est atteinte par le corps froid; et elle se ferait en sens inverse si la limite était dépassée. On dit alors qu'il y a *équilibre* de chaleur entre les deux corps, parce que, s'ils sont seuls en contact ou sans relation appréciable avec d'autres (fût-ce par l'intermédiaire de l'éther), leur état calorifique subsiste sans modification.

Dans le cas particulier où les deux corps sont de même nature, cette limite, pour le corps primitivement froid, n'est autre que l'état même du corps chaud à l'instant de l'équilibre; car, par raison de symétrie, le passage du mouvement, d'un corps à l'autre, s'annule au moment où il y a parité d'état chez tous les deux.

Pour chaque état donné du corps chaud, il y a donc un certain degré calorifique de chacun des autres corps, tel, que, lorsque ce degré est atteint par ceux-ci, l'équilibre de chaleur existe entre eux et lui (supposés mis en contact); et le degré dont il s'agit s'élève, dans l'échelle calorifique de chaque corps, quand on se représente l'état donné du corps chaud montant lui-même. Par conséquent, il y a une correspondance bien définie, échelon par échelon, entre les échelles d'agitation interne de l'un quelconque d'entre eux et celle du corps, choisi à volonté, que nous appelons

Digitized by Google

le *corps chaud,* et qui sera notre *thermomètre;* en sorte que les degrés de tous pourraient être définis et remplacés par les degrés mêmes de celui-ci tout seul.

Mais la grande réduction opérée de la sorte serait encore très imparfaite, si les degrés qui se correspondent ainsi, dans les échelles de deux corps, à raison de ce qu'ils correspondent séparément à un même degré de l'échelle du thermomètre, cessaient de se correspondre quand on adopterait un nouveau thermomètre au lieu du premier. Et c'est ce qui arriverait, en général, si le nouveau corps thermométriqne, supposé mis en équilibre de chaleur avec le premier, c'est-à-dire avec le thermomètre précédent, pouvait ne l'être pas avec les autres corps où le contact du premier ne provoquait aucune modification de l'état calorifique. Mais une expérience constante a prouvé que, conformément à ce qu'on pouvait imaginer de plus simple, *deux corps en équilibre de chaleur avec un troisième* (savoir, avec le premier thermomètre) *le sont entre eux,* soit quand on les met en contact, soit même quand leur influence réciproque se produit par voie de rayonnement, c'est-à-dire quand leurs surfaces en regard sont séparées uniquement par l'éther libre.

43. Notion de température : températures absolues; températures centigrades. — Donc la correspondance entre les échelles calorifiques de deux corps quelconques est entièrement indépendante du thermomètre choisi; et si l'on imagine que tous les corps de la nature soient chauffés ou refroidis simultanément, avec une grande lenteur, de manière que ceux qui se touchent ou n'ont entre eux que de l'éther soient en équilibre calorifique, cet équilibre subsistera malgré tous les changements imaginables apportés à leurs dispositions mutuelles et à leurs contacts. Bref, il y a, pour tous, une échelle unique et invariable des états d'agitation calorifique.

Chaque degré de cette échelle s'appelle une *température,* pour rappeler sans doute l'égalisation, l'équilibre entre tous les corps où elle se présente; et, dès lors, cet équilibre est dit, lui-même, *équilibre de température.* Chaque température constitue ainsi une sorte de *niveau* calorifique commun à tous les corps où elle existe; car, en eux et entre eux, la chaleur se maintient station-

Digitized by Google

naire, comme le fait l'eau, à la surface de notre globe, dans des réservoirs communiquants situés à une même altitude. D'ailleurs, le niveau calorifique, la température, sont d'autant plus élevés, dans un corps, que l'agitation y est plus grande; et les cessions de mouvement invisible se font, entre corps à températures différentes, de manière que la chaleur passe de la température plus élevée à la température plus basse, comme l'eau sans vitesse initiale se déplace d'un réservoir à un autre en passant du niveau plus haut au niveau plus bas.

Reste à savoir quelles substances on choisira pour en faire les thermomètres, c'est-à-dire pour apprécier, d'après leurs dilatations, les températures auxquelles elles seront portées successivement, identiques à celles des corps dans lesquels on les laissera plongées. Ce seront, naturellement, celles que la chaleur dilate le plus, c'est-à-dire les fluides, et surtout les gaz les plus difficiles à liquéfier, hydrogène, oxygène, azote, air, à la fois si peu denses, et si expansibles par l'échauffement, qu'ils semblent lui devoir, à peu de chose près, tout leur volume. Tous ces gaz se dilatent, d'ailleurs, très sensiblement de même aux températures usuelles et sous les pressions maintenues constantes de l'ordre de grandeur de celle de l'atmosphère : leur accroissement de volume, entre la température de la glace fondante et celle de la vapeur d'eau bouillant sous la pression atmosphérique, est, à très peu près, de 100 fois la 273e partie de leur volume à la première de ces deux températures.

On choisira, par exemple, comme unité propre à mesurer les dilatations successives d'une petite masse d'air prise pour substance thermométrique, la centième partie de l'accroissement qu'éprouvera son volume au passage de la glace fondante dans la vapeur d'eau bouillante (sous la pression atmosphérique normale de 76 centimètres de mercure); et le nombre évaluant chaque température sera le volume même qu'offrira cette masse à la température en question, exprimé au moyen de l'unité ainsi définie. Celle-ci constitue le *degré centigrade,* parce qu'il y en a 100 entre les deux températures de repère choisies (glace fondante, eau bouillante) dont la plus basse sera 273 (ou 273°), d'après ce qui vient d'être dit.

A des froids beaucoup plus accusés que celui de la glace fon-

Digitized by Google

dante, les gaz désignés ci-dessus cessent de se contracter de la même manière et, finalement, ils se liquéfient les uns après les autres. On est donc réduit, pour prolonger la graduation du thermomètre jusqu'aux plus basses températures, à imaginer un *gaz parfait* qui conserverait son aspect et sa pression jusqu'à l'annulation presque totale de son volume, à 273° environ au-dessous de la température de la glace fondante.

Les températures ainsi données (sauf les plus basses) par le thermomètre à air, sont dites *températures absolues,* parce qu'on les suppose comptées à partir du *zéro absolu,* c'est-à-dire d'une origine correspondant à l'absence totale d'agitation calorifique. En effet, la parité de dilatation des divers gaz s'explique le plus naturellement, en admettant, d'une part, que leur volume, dû presque tout entier à leur agitation interne ou à leur chaleur sensible, lui est proportionnel, et, d'autre part, qu'il y a équilibre de température entre eux lorsque leurs chaleurs respectives ou sensibles, ou totales, ont entre elles certains rapports constants dépendant de leurs natures. Un gaz parfait servant de substance thermométrique aurait donc son volume *nul,* ou marquerait 0° de température, quand il serait totalement privé de chaleur.

La graduation la plus usuelle, dite *centigrade,* est celle où l'on garde toujours le degré centigrade, mais où l'on prend comme origine, comme *zéro,* la température de la glace fondante. Si donc T désigne une température centigrade, la température absolue correspondante est $273° + T$.

44. Expression usuelle de la chaleur totale d'un solide par unité de volume, en fonction de sa température, supposée modérément variable. — Dans la suite de ce cours, nous choisirons ordinairement pour zéro auxiliaire la température la plus importante qui figurera dans la question étudiée, comme, par exemple, celle $273° + T$ d'une atmosphère très étendue entourant le corps considéré; et nous appellerons u l'excédent sur celle-là de chaque température effective d'une particule du corps.

Cet excédent u, qui sera ainsi notre variable définissant les températures, n'aura ordinairement que des valeurs petites par rapport à la température absolue prise pour origine, $273° + T$. Or, de là résultera une simplification importante des fonctions de la

Digitized by Google

température ou qui auront la forme $f(273^\circ + T + u)$. N'ayant à considérer leurs variations que dans une très petite partie du champ comprenant la totalité de leurs valeurs, on pourra les y supposer linéaires, de la forme $A + Bu$, puisqu'il suffira de remplacer par une tangente ou par une courte sécante le petit arc utilisé de la courbe qui les représenterait tout entières.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une particule solide, toujours très peu dilatable, ou d'un volume sensiblement constant, et placée dans le vide, ou, ce qui revient presque au même, soumise à une pression constante, seulement de l'ordre de la pression atmosphérique. Sa chaleur totale γ par unité de volume sera évidemment une fonction croissante de la température absolue $273^\circ + T + u$; et, en appelant A la valeur de cette fonction à la température absolue $273^\circ + T$ du zéro choisi, C le nombre de calories nécessaires dans le voisinage de cette température absolue pour élever de 1° la température de l'unité de volume du corps étudié, on aura

$$\gamma = A + Cu. \tag{24}$$

Le coefficient C est dit le *calorique spécifique* du corps *par unité de volume :* il dépend, tout à la fois, et de la nature du corps étudié, et de la température absolue $273^\circ + T$ pour laquelle on l'évalue.

Pour un volume donné $\int d\varpi$ du solide, la chaleur totale $\int_\varpi \gamma\, d\varpi$ sera

$$\int_\varpi A\, d\varpi + \int_\varpi Cu\, d\varpi;$$

et sa variation d'un moment à l'autre, produite par les changements de la température u survenus dans le volume durant l'instant dt, aura comme formule

$$dt \int_\varpi C \frac{du}{dt}\, d\varpi. \tag{25}$$

Celle-ci deviendra ainsi le premier membre de l'équation des forces vives, telle qu'elle a été obtenue dans notre deuxième Leçon (p. 26), ou propre à fournir l'équation aux dérivées partielles régissant les températures u. Mais il reste évidemment,

Digitized by Google

pour pouvoir l'en déduire, à exprimer de même, en fonction de u ou de ses dérivées, le second membre dJ de l'équation, c'est-à-dire les flux de chaleur entrés dans le volume à travers les divers éléments de sa surface, et dont dJ désigne la somme.

Nous passerons donc, dans la prochaine Leçon, à l'étude des flux de chaleur.

Digitized by Google

SEPTIÈME LEÇON.

ÉTUDE DES FLUX DE CHALEUR : RÉDUCTION DE CES FLUX, POUR TOUS LES ÉLÉMENTS PLANS D'UNE PARTICULE, A UN COURANT UNIQUE TRAVERSANT LA PARTICULE.

---

45. Quasi-neutralisation des flux qui pénètrent à travers les faces d'un élément de volume. — Nous avons déjà reconnu (p. 28) que les deux flux de chaleur passés, dans les deux sens, à travers un même élément plan et durant un même instant, ou échangés par les deux couches de matière que sépare l'élément plan, ont même valeur absolue, avec signes contraires, à des écarts près négligeables par rapport à chacun d'eux. Nous conviendrons de distinguer ces deux flux l'un de l'autre, en nous donnant les cosinus directeurs de la normale à l'élément plan, menée du côté où est la matière d'où vient le flux considéré, ou de laquelle émanent les actions moléculaires ayant leur travail représenté par ce flux. Autrement dit, nous considérerons séparément, dans chaque élément plan, les deux faces, supérieure et inférieure, par exemple, et nous associerons à chaque flux la face par laquelle il entrera dans l'élément ou dont la normale, menée vers le dehors, pénétrera dans la matière d'où vient ce flux. Alors l'élément plan ainsi dédoublé deviendra une surface close, enfermant un volume nul, ou, si l'on veut, infiniment petit, c'est-à-dire supposé avoir décru jusqu'à zéro à mesure que se sera aplatie son enveloppe. Et les deux flux qui traversent en sens contraire l'élément plan seront ceux qui y pénétreront par ses deux faces. L'égalité à zéro de leur somme algébrique signifiera donc que *les flux entrant à la fois dans un tel volume élémentaire*, par toute sa superficie, *se neutralisent*.

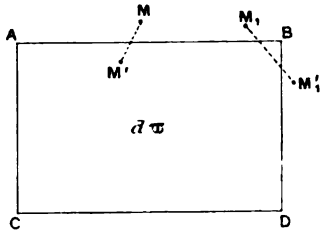
Digitized by Google

46. Équivalence de la chaleur entrée dans un élément, par sa superficie, à la somme des flux passés à travers les diverses faces de l'élément, en venant du dehors. — La théorie des flux de chaleur repose sur la généralisation de ce fait, savoir, sur son extension à tout élément de volume ou, en d'autres termes, à tout volume tracé idéalement dans un corps et de dimensions insensibles, mais néanmoins très grandes à côté du rayon d'activité des actions moléculaires. Démontrons donc que les flux de chaleur entrés durant un instant dt par les diverses faces d'un pareil élément se neutralisent, à des écarts près négligeables en comparaison de chacun d'eux, ou plutôt de leur somme arithmétique.

Pour cela, nous établirons d'abord que la chaleur totale cédée à un élément de volume par la matière environnante égale la somme algébrique des flux qui traversent ses diverses faces en venant du dehors : théorème évident dans la supposition de la matérialité de la chaleur, mais non dans l'hypothèse thermodynamique.

Soit, pour fixer les idées, un élément de volume $d\varpi$, en forme ou de parallélépipède ou de tétraèdre, etc., et que représentera, par exemple, si on le voit de profil, la *fig.* ABDC. La chaleur totale cédée à sa matière par la matière environnante étant la

Fig. 4.



somme des travaux (dans le mouvement calorifique) des forces qui émanent des molécules M, M_1, ... de celle-ci et qui s'exercent à des distances imperceptibles sur les molécules intérieures, comme M', on peut dire que la chaleur cédée *à travers* la face AB, par exemple, comprend le travail de toute action moléculaire s'exerçant, du dehors, suivant une imperceptible droite de jonction de molécules menée à travers AB et aboutissant à un point intérieur, comme est, par exemple, l'action exercée du dehors suivant

Digitized by Google

la droite de jonction MM′, action de M sur M′ ou propre au couple moléculaire correspondant (M, M′). On voit donc que tous les travaux qui constituent la chaleur *cédée à travers* AB entrent dans le flux calorifique *passé à travers* AB *en venant du dehors*. Mais ce flux contient *en outre* les travaux d'actions exercées sur le contour de la face AB, suivant les imperceptibles droites de jonction qui, comme $M_1 M'_1$, sortent du volume ou relient, à travers AB, deux molécules voisines M_1, M'_1, extérieures toutes les deux.

Seulement, il est visible que ces travaux d'actions étrangères compris dans les flux sont négligeables par rapport aux flux mêmes, autant que la largeur des zones de contour ou le rayon d'activité des actions moléculaires le sont par rapport aux dimensions des faces elles-mêmes. Ils seront même insensibles en comparaison de la différence des flux, pris en valeur absolue, passés à travers des faces opposées et égales de l'élément de volume, comme AB, CD : car, vu la graduelle variation de l'état physique d'un point à un autre et d'un plan AB à un plan parallèle voisin CD, cette différence de deux flux analogues sera une fraction de l'un d'eux comparable au rapport de la distance AC des deux plans aux distances le long desquelles l'état physique varie notablement. Or, sauf dans le cas très exceptionnel d'un état physique variable presque brusquement, rien n'empêchera de prendre ce dernier rapport incomparablement moins petit que n'est le rayon d'activité des actions moléculaires comparativement aux dimensions des faces de l'élément de volume.

A quoi il faut ajouter que les actions étrangères, dont les travaux figurent ainsi dans les flux de chaleur, s'associeront toujours deux par deux, quand on prendra la somme des flux à travers les diverses faces, de manière que leurs travaux donnent, dans ces couples, des sommes beaucoup plus faibles en moyenne que chacun d'eux. En effet, l'une quelconque, $M_1 M'_1$, des droites de jonction considérées, perçant deux faces AB et BD, donnera lieu, dans les deux flux réunis concernant ces faces, au travail des deux actions de M_1 sur M'_1 et de M'_1 sur M_1, soit, en tout, au travail total de l'action réciproque exercée suivant $M_1 M'_1$, différentielle (au signe près) de l'énergie potentielle interne du corps par rapport à la distance $M_1 M'_1$. On a reconnu, au n° 18 (p. 28), l'extrême

Digitized by Google

petitesse, au moins en moyenne, de cette différentielle, par rapport au travail individuel des deux actions égales et contraires qui y figurent. Donc, les erreurs commises en identifiant les divers flux avec les chaleurs entrées dans l'élément $d\varpi$ par les faces correspondantes auraient leur somme algébrique négligeable, quand bien même elles seraient individuellement sensibles.

47. Démonstration du principe de quasi-neutralisation des flux. — Cela posé, observons que le flux de chaleur passant à travers un élément plan, durant une unité de temps, est généralement de l'ordre de petitesse de son aire. Car, tout corps d'un volume sensible, ou notable, a sa surface sensible également et acquiert ou perd, en général, à travers cette surface, par unité de temps, une quantité de chaleur notable aussi. Or il faut évidemment, pour cela, que le rapport des flux traversant les divers éléments plans de sa surface, aux aires respectives de ces éléments, soit, en moyenne, fini, et non très petit. Par suite, si l'on a limité idéalement le volume par une surface comprenant l'élément plan proposé, celui-ci, comme les autres de la surface, sera bien traversé dans l'unité de temps par un flux de l'ordre de grandeur de son aire.

Imaginons maintenant que l'on délimite à l'intérieur du corps, en les construisant sur l'élément plan donné, des volumes de plus en plus petits, jusqu'à ce qu'on arrive à l'élément $d\varpi$ de volume que l'on a en vue. La somme des flux, *pris en valeur absolue,* qui, du dehors, viennent traverser ses faces, sera, en général, de l'ordre de sa superficie, c'est-à-dire comparable au produit de ses deux plus grandes dimensions. Mais la somme *algébrique* des mêmes flux, valeur de la chaleur gagnée par le volume dans l'unité de temps, ne pourra être du même ordre qu'à des instants exceptionnels; car, si elle l'était d'une manière continue, son quotient par la capacité calorifique totale $C\,d\varpi$ de l'élément, quotient qui représente l'élévation de température correspondant à cette entrée de chaleur, serait croissant avec la petitesse de l'élément, comme le quotient même de son aire par son volume, c'est-à-dire comme l'inverse, extrêmement grand, de sa plus petite dimension. La température varierait donc dans l'élément de volume avec une rapidité pour ainsi dire infinie; ce qui n'est évidemment compatible avec le principe de graduelle variation des phénomènes

Digitized by Google

qu'à des instants très exceptionnels, quand survient, pour ainsi dire, un *accident,* dû, en général, à quelque cause *étrangère,* et auquel les lois naturelles remédient aussitôt par la rapide variation trouvée ici, expression de leur tendance à rétablir la continuité.

Donc, à l'état normal, ou alors que la dérivée $\frac{du}{dt}$ est finie, la somme algébrique des flux de chaleur venus du dehors, à travers les diverses faces d'un élément de volume, est comme infiniment petite comparativement à leur somme arithmétique. Autrement dit, il y a bien *quasi-neutralisation* de ces flux de chaleur.

48. **Extension du principe de quasi-neutralisation aux éléments de volume diathermanes et à ceux qui contiennent une source de chaleur.** — Un corps diathermane, mais qu'on a réussi à chauffer, c'est-à-dire à faire vibrer avec des périodes et des amplitudes comparables à celles des vibrations de son éther, a ses éléments de volume capables de céder à celui-ci et, par lui, à l'éther environnant jusqu'à des distances considérables, des quantités de chaleur, positives ou négatives, qui, condensées en eux, mais rayonnantes ou infiniment dilatées dans l'éther et propagées alors avec une vitesse pour ainsi dire infinie, ne vont pas se fixer sur les éléments pondérables de volume contigus, à raison de leurs petites inégalités de température avec eux-mêmes. Celles-ci donnent seulement lieu, comme dans une matière athermane, à des flux à travers les faces, où sont en jeu les actions intermoléculaires de la matière pondérable.

Les quantités de chaleur ainsi emportées ou apportées directement par l'éther à un élément de volume, tiennent uniquement, pour chaque température donnée u de celui-ci, à l'état vibratoire moyen de l'éther ambiant, à son degré d'agitation dépendant de causes plutôt générales que locales. A l'endroit où se trouve l'élément de volume et à l'instant considéré, cet état vibratoire général, ou degré d'agitation de l'éther, est toujours tel, que l'élément de volume, s'il avait une température convenable ou appropriée u_e croissant avec le degré en question, ne gagnerait ni ne perdrait aucune chaleur par le fait de son immersion dans l'éther. C'est cette température u_e, indépendante de la substance de l'élément de volume en vertu du *principe de l'équilibre des températures*

Digitized by Google

(p. 94), qu'on peut appeler la *température de l'éther* à l'endroit considéré. Et alors la chaleur que l'élément de volume gagne par RAYONNEMENT, c'est-à-dire par pénétration directe de la chaleur rayonnante à son intérieur, est évidemment une fonction de u s'annulant pour $u = u_e$, ou une fonction de la variable $u_e - u$ croissant avec celle-ci et de même signe qu'elle.

Le gain de chaleur, positif ou négatif, fourni par l'éther, dans l'unité de temps, à l'élément de volume, est, d'ailleurs, de l'ordre de cet élément $d\varpi$, comme son gain total corrélatif à l'accroissement $\frac{du}{dt}$ de sa température; car les particules juxtaposées de matière pondérable qui composent $d\varpi$ y sont, de la même manière, en relation directe avec l'éther, et absorbent ou émettent dès lors une chaleur rayonnante totale proportionnelle à leur nombre. Par suite, l'autre partie du gain de chaleur qu'a acquis l'élément de volume $d\varpi$, savoir, la somme algébrique des flux fournis par les éléments de volume voisins, est également du même ordre. Ces flux de chaleur se neutralisent donc encore très sensiblement, comme dans un élément de volume athermane.

Il importe d'étendre aussi le même principe de quasi-neutralisation aux éléments de volume qui seraient le siège de créations ou de destructions de chaleur. Pour plus de simplicité, nous avons écarté un tel cas dans nos première et deuxième Leçons (p. 9 et 12), par le fait même que nous y avons réduit les molécules à des points matériels censés inaltérables et indestructibles. Mais il se présenterait, si la matière de l'élément de volume comprenait des substances chimiquement actives, en proportion trop faible, par exemple, pour que leur transformation modifiât d'une manière sensible les propriétés physiques en jeu dans la question (volume, capacité calorifique C, etc.), mais néanmoins suffisante pour que les modifications survenant dans le mode d'association de leurs atomes dégageât ou absorbât une énergie vibratoire appréciable. A cause des énormes quantités de chaleur que les actions chimiques peuvent fournir ou prendre par unité des masses en jeu, la réunion de ces deux circonstances n'est pas impossible. Et alors l'élément de volume devient une *source* de chaleur ou de froid : tant qu'un peu de sa matière continue ses transformations, il se comporte comme si de la chaleur y était créée ou anéantie

Digitized by Google

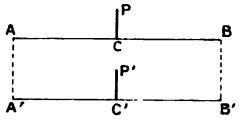
sur place, tout en conservant presque son aspect et les propriétés physiques qui sont à considérer ici.

Or cette chaleur produite ou supprimée est visiblement en rapport de grandeur avec la quantité de matière transformée chimiquement, laquelle l'est elle-même, par unité de temps, avec la totalité de la masse transformable qui existe dans l'élément de volume $d\varpi$, c'est-à-dire avec le volume $d\varpi$ lui-même, pour chaque composition donnée de sa matière. Ainsi la chaleur apparue par unité de temps dans l'élément de volume, sans lui venir ni de l'éther, ni des volumes pondérables voisins, est de l'ordre de $d\varpi$, comme celle qui, s'il est diathermane, lui vient de l'éther par rayonnement, et aussi comme l'accroissement total $C\frac{du}{dt}d\varpi$ de sa quantité de chaleur. Donc l'excédent de ce dernier sur la somme des deux quantités précédentes de chaleur, excédent représentant la somme algébrique des flux venus du dehors à travers les diverses faces de l'élément, est lui-même de l'ordre de $d\varpi$; c'est-à-dire incomparablement moindre que la somme absolue des mêmes flux, dont l'ordre est celui de l'aire limitant $d\varpi$; et il y a bien encore quasi-neutralisation de ces flux de chaleur.

Tel est le principe dont deux applications capitales vont nous montrer les relations existant, dans chaque petite région d'un corps, entre les flux de chaleur qui y traversent les divers éléments plans.

49. Continuité des flux de chaleur, ramenés à l'unité d'aire et relatifs aux éléments plans qui se déplacent dans le corps parallèlement à eux-mêmes. — Soient AB, A'B' deux éléments plans voisins, dont le second est obtenu par un petit déplacement du premier perpendiculairement à lui-même. Ce déplacement amène

Fig. 5.



en C'P' la normale CP au premier, menée du côté où est la matière envoyant à travers AB le flux de chaleur que l'on a en vue;

Digitized by Google

et, par suite, nous considérerons aussi, à travers A'B', le flux de chaleur qui vient du côté où est C'P'. Si l'état physique, dans le corps, varie graduellement, d'un point à l'autre, le long des droites tangentes ou à AB, ou à A'B', et qu'il soit, par conséquent, très sensiblement pareil sur toute l'étendue de AB, sensiblement pareil d'autre part sur toute l'étendue de A'B', c'est-à-dire, en somme, dans les couches minces de matière que sépare chacun de ces éléments plans (prolongés au besoin), il est clair que les flux de chaleur se trouveront aussi pareils à travers des parties égales ou de AB, ou de A'B'; en sorte que les flux y seront proportionnels à leurs deux aires respectives et pourront être évalués pour l'unité de ces aires.

Appelons donc F, F' ces deux flux respectifs, *par unités d'aire et de temps,* ou $F\omega dt$ et $F'\omega dt$ leurs valeurs effectives, durant un instant dt et à travers les surfaces AB, A'B', dont ω désignera l'aire. Comme, vu la continuité de variation de l'état physique suivant les directions tangentes à AB ou à A'B', nous pouvons imaginer qu'on ait donné à ces deux éléments plans des dimensions très grandes par rapport à leur distance mutuelle AA', l'élément de volume cylindrique ou prismatique ABB'A' compris entre eux sera un disque plat, d'une surface latérale BB'A'A incomparablement plus petite que les deux bases ω; et, par suite, aucune raison ne faisant supposer les flux par unité d'aire, à travers cette surface latérale, d'un ordre de grandeur plus élevé que les flux à travers les bases, les flux entrés durant l'instant dt par toute la surface du disque se réduiront très sensiblement à ceux qui auront traversé les deux bases, flux égalant, l'un, à travers AB, $F\omega dt$, l'autre, à travers A'B', le contraire du flux sortant $F'\omega dt$. La quasi-neutralisation des flux, pour les faces de l'élément, revient donc à écrire que la somme algébrique $F\omega dt - F'\omega dt$ a un rapport comme nul avec chacun de ses deux termes, ou que l'on a très sensiblement $F' = F$.

En d'autres termes, *toutes les fois que l'état physique varie graduellement suivant les sens tangents à un élément plan, et graduellement aussi sur un élément plan de même direction construit dans le voisinage, le flux de chaleur par unités de temps et de surface varie lui-même avec continuité de l'un de ces éléments plans à l'autre.*

Digitized by Google

50. Égalité des flux à travers les deux faces de la couche séparative de deux corps ou milieux contigus. — On remarquera que la démonstration précédente subsiste quand l'état physique est très différent sur deux éléments plans parallèles voisins, pourvu qu'il soit presque le même sur toute l'étendue de chacun d'eux. Par exemple, si SS′ est la surface de séparation de deux corps contigus différemment constitués, ou représente la *couche de transition,* d'une épaisseur totale imperceptible, qui existe entre eux, la continuité régnera sur chacun, en particulier, des éléments plans voisins EF, E′F′ menés dans les deux milieux parallèlement à la surface, quoiqu'elle n'existe pas au passage de l'un à l'autre, qui exige la traversée de SS′. Il s'ensuivra donc l'égalité très approchée des flux à travers EF et E′F′, sous la seule réserve d'une *courbure* de SS′ *assez modérée* pour permettre la construction d'un disque EFF′E′ très plat, ayant ses deux bases *tout entières* situées respectivement à l'intérieur de l'un et de l'autre milieu. Donc, *si l'on peut imaginer, à la séparation de deux milieux, une couche superficielle très mince par rapport à ses rayons de courbure, mais comprenant néanmoins toute la matière dont la constitution et l'état physique varient rapidement, ses deux faces, en chaque endroit et à chaque instant, seront traversées par des flux de chaleur égaux.*

Fig. 6.

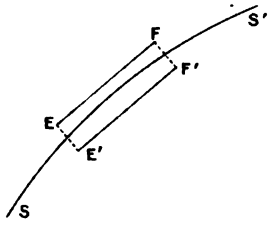
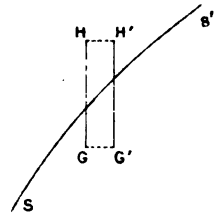


Fig. 7.



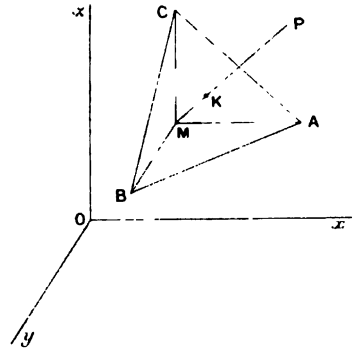
Il n'en serait pas de même pour des éléments plans, comme GH, G′H′, non parallèles à la surface SS′ de séparation; car alors le disque plat GHH′G′ aurait forcément ses bases coupées par celle-ci, et la continuité n'existerait ni de G à H, ni de G′ à H′.

51. Tétraèdre de Cauchy; éléments plans principaux et flux calorifiques principaux, relativement aux axes coordonnés. — Traçons maintenant à l'intérieur d'un de nos deux milieux, là où

Digitized by Google

la continuité de l'état physique sera partout admissible, un élément plan quelconque, passant par un point donné M, à coordonnées x, y, z. Le flux F qu'on y considérera sera *fixé* (c'est-à-dire distingué de son contraire relatif au même élément superficiel) au moyen de la normale MP à cet élément plan, menée, comme il a été dit, du côté où est la matière qui envoie le flux à travers l'élément. Soient donc α, β, γ les trois angles de MP

Fig. 8.



avec les parties positives Ox, Oy, Oz des axes rectangulaires choisis, angles dont les cosinus (*cosinus directeurs*) définissent parfaitement la direction MP. Nous pourrons porter sur MP une petite longueur MK, de l'ordre des dimensions d'un élément de volume, et prendre, sauf erreur négligeable, pour le flux F, celui qui traversera, par unités d'aire et de temps, l'élément plan ABC mené en K normalement à MP, c'est-à-dire parallèle au proposé et extrêmement voisin. Si, enfin, par M, nous menons, jusqu'à la rencontre de ce plan ABC, trois autres plans respectivement normaux aux axes des x, y, z, nous formerons le tétraèdre MABC, trirectangle en son sommet M, ayant pour base, ω, l'élément plan ABC, limité ainsi à ce triangle, et MK pour hauteur.

On l'appelle le *tétraèdre de Cauchy,* du nom du grand géomètre qui l'a introduit en Physique mathématique et en a montré l'emploi.

Il sera construit dans l'un des huit angles trièdres formés en M par les plans parallèles aux plans coordonnés, savoir, dans celui des huit qui contiendra la normale MP à ω. Et l'on remarquera

Digitized by Google

que ses trois faces perpendiculaires aux axes respectifs des x, y, z, savoir, BMC que nous appellerons ω_x, CMA que nous appellerons ω_y, et AMB que nous appellerons ω_z, appartiendront toujours aux mêmes éléments plans rectangulaires entre eux, quel que soit, en M, l'élément plan proposé, ou quelle que soit l'orientation de la quatrième face ω. Seulement, ce ne seront pas toujours les mêmes faces de ces éléments plans rectangulaires qui se trouveront utilisées pour l'entrée des flux de chaleur dans le tétraèdre. Il est évident que, pour BMC par exemple, ce sera la face tournée vers les x négatifs, si MP fait un angle aigu avec Ox, ou si $\cos\alpha$ est positif, mais la face tournée vers les x positifs si $\cos\alpha$ est négatif.

Les trois éléments plans menés, par le point donné M, normalement aux axes coordonnés, sont dits, pour ce point M, les éléments plans *principaux relatifs aux axes*. Et les flux de chaleur qui, par unités de surface et de temps, les traversent en venant, pour chacun, du côté où est la partie infinie positive de l'axe correspondant normal, s'appellent les trois *flux principaux relatifs aux axes*. Nous les nommerons respectivement F_x, F_y, F_z.

En conséquence, à travers l'unité d'aire de BMC, par exemple, le flux entrant dans le tétraèdre sera $-F_x$ si $\cos\alpha$ est positif, mais F_x si $\cos\alpha$ est négatif; et, à travers la face BMC entière, ce flux sera évidemment, dans les mêmes cas, $(\mp \text{BMC})\,F_x$. Or, la face BMC, projection de ABC ou ω sous l'angle AMP $= \alpha$, est, dans les mêmes cas, $\pm\,\omega\cos\alpha$, en valeur absolue. Appelons ω_x cette projection, mais comptée positivement quand elle tombe sur la face de BMC exposée aux x positifs, comme dans le cas de la figure, négativement dans le cas contraire. On aura donc $\omega_x = \omega\cos\alpha$, ou BMC $= \pm\,\omega_x$; et le flux $(\mp \text{BMC})\,F_x$ entrant à travers BMC sera, dans tous les cas, $-F_x\omega_x$.

Si nous appelons ω_y, ω_z les deux projections analogues $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$ de ω sur les plans CMA, AMB, les flux entrant par ces faces CMA, AMB seront de même $-F_y\omega_y$, $-F_z\omega_z$.

Enfin, le flux entrant par la face ABC ou ω aura évidemment pour expression $F\omega$; et le principe de quasi-neutralisation des flux, appliqué aux quatre faces du tétraèdre, donnera la formule

$$F\omega = F_x\omega_x + F_y\omega_y + F_z\omega_z. \tag{26}$$

Digitized by Google

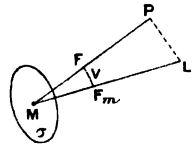
52. Expression d'un flux quelconque en fonction des trois flux principaux relatifs aux axes. — Le flux F peut, comme on a vu, être censé se rapporter, dans cette formule, non à la quatrième face ABC du tétraèdre, mais à l'élément plan donné, mené par M, qui lui est parallèle. Alors, si cet élément plan ω prend successivement dans son plan, autour de M, des formes quelconques et de très petites grandeurs aussi quelconques, ses projections ω_x, ω_y, ω_z sur les trois plans rectangulaires fixes se croisant en M garderont sans cesse les mêmes rapports à ω; de sorte que la formule (26), homogène en ω_x, ω_y, ω_z, ω, ne cessera pas d'être vérifiée. Elle exprime donc que *le flux de chaleur* $F\omega$ *traversant un élément plan quelconque est la somme algébrique des flux* $F_x\omega_x$, $F_y\omega_y$, $F_z\omega_z$, *qui traversent ses projections sur trois plans rectangulaires fixes, mais d'orientations d'ailleurs quelconques, se croisant en un de ses points.*

Remplaçons enfin, dans (26), ω_x, ω_y, ω_z par leurs valeurs $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$; et la suppression du facteur commun ω nous donnera, pour exprimer le flux quelconque F en fonction linéaire des trois flux principaux F_x, F_y, F_z relatifs aux axes, la relation

$$F = F_x\cos\alpha + F_y\cos\beta + F_z\cos\gamma. \tag{27}$$

53. Expression du même flux quelconque en fonction du flux maximum et de l'angle des deux plans qu'ils traversent. — Mais allons plus loin et exprimons F au moyen d'un flux unique F_m,

Fig. 9.



donné, pour les unités d'aire et de temps, par le radical $\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$. A cet effet, construisons, à partir de M, la droite ML, parfaitement définie au moyen des trois flux principaux F_x, F_y, F_z, qui a ces flux pour projections sur les axes Ox, Oy, Oz, ou qui a la longueur F_m, avec les cosinus directeurs

Digitized by Google

respectifs

$$(28) \qquad \cos\lambda = \frac{F_x}{F_m}, \qquad \cos\mu = \frac{F_y}{F_m}, \qquad \cos\nu = \frac{F_z}{F_m}.$$

Autrement dit, λ, μ, ν étant les trois angles qu'elle fait avec Ox, Oy, Oz, posons

$$(29) \qquad F_x = F_m \cos\lambda, \qquad F_y = F_m \cos\mu, \qquad F_z = F_m \cos\nu;$$

et soit, en même temps, V l'angle de cette droite ML avec la normale MP à l'élément plan quelconque donné, angle ayant, par suite, le cosinus

$$\cos V = \cos\lambda \cos\alpha + \cos\mu \cos\beta + \cos\nu \cos\gamma.$$

Il viendra, par la substitution à F_x, F_y, F_z, dans (27), de leurs expressions (29),

$$(30) \qquad F = F_m \cos V.$$

On voit que F_m ou $\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$ représente la valeur la plus grande possible du flux F, celle qui a lieu pour $\cos V = 1$ ou $V = 0$, c'est-à-dire pour l'élément plan σ normal à ML et traversé à partir de sa face située du côté où est menée cette droite ML.

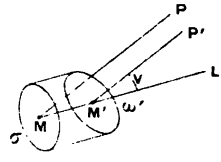
Si l'on prend ML égal, comme il a été dit, à ce flux maximum, la formule (30) donne évidemment, pour tout autre flux F également rapporté à l'unité d'aire de l'élément plan qu'il traverse, la projection, MP, de ML ou F_m, sur la normale à cet élément plan quelconque.

54. Réduction de tous les flux calorifiques, dans chaque petite région d'un corps quelconque, à un courant de chaleur, qui y traverse les divers éléments plans suivant une même direction. — Le flux F sera nul pour $V = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire à travers tout élément plan mené suivant ML, et, par suite, très sensiblement, à travers tous les éléments plans parallèles à ML dans le voisinage de M. Donc, un cylindre infiniment petit contournant l'élément σ, et à génératrices tirées suivant la direction de ML, n'a, actuellement, l'unité d'aire de sa surface latérale traversée par aucun flux appréciable. Et, si l'on applique le principe de la quasi-neutrali-

Digitized by Google

sation des flux au tronçon cylindrique compris entre sa base σ et une section ω' menée, par un point M′ de ML voisin de M, parallèlement à l'élément donné ω qui passe par M, on verra que le flux $F_m\sigma$ sortant par σ devra être égal au flux $F\omega'$ entrant par ω'.

Fig. 10.



C'est, du reste, ce qu'exprime la formule (30), où, seulement, F se rapporte à l'unité d'aire, non de ω', mais de son parallèle ω mené par M; ce qu'on sait revenir sensiblement au même. En effet, si M′P′ est perpendiculaire à ω', ou parallèle à MP, l'angle LM′P′ sera V, et σ, projection de ω' sous l'angle V, aura la valeur $\omega' \cos V$. D'où il suit bien que l'égalité $F_m\sigma = F\omega'$ revient exactement à (30),

Les flux calorifiques se comportent donc, près du point considéré M d'un corps (même diathermane et pourvu de sources intérieures de chaleur), comme si la chaleur y était un fluide, filtrant à travers un milieu poreux plus ou moins soluble, qui s'y déplacerait actuellement dans le sens de LM, en formant tout autour un courant d'une vitesse et d'une direction graduellement variables d'un point à l'autre comme d'instant en instant, et de manière que la quantité de fluide apportée ou enlevée par un élément de volume du milieu poreux, fût insignifiante à côté de celle qui le traverse. Alors, en effet, un égal débit fluide serait fourni, dans le voisinage de M, par tous les éléments plans qui constitueraient, comme ω' et σ, des sections d'un même courant, puisque ce seraient les mêmes particules fluides, à très peu près, qui les traverseraient.

En conséquence, le flux maximum F_m, débit du courant à travers l'unité d'aire de sa section normale σ, sera dit, pour abréger, le *courant actuel de chaleur* en M. Il aura, comme grandeur, $\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$, et comme direction, celle que définissent les

Digitized by Google

trois cosinus $\frac{(F_x, F_y, F_z)}{F_m}$, changés de signe, c'est-à-dire celle de LM. Et le flux (par unité d'aire) à travers tout élément plan, ω, oblique au courant, sera, comme on voit aussi, la partie, $F_m \cos V$, du courant, qui traversera l'unité d'aire de cet élément plan ω, c'est-à-dire la projection $\cos V$ de cette unité d'aire sur la section normale σ du courant.

Digitized by Google

HUITIÈME LEÇON.

LES FLUX DE CHALEUR, FONCTIONS DE LA RAPIDITÉ DES CHUTES DE TEMPÉRATURE ENTRE POINTS VOISINS ET DE LA CONTEXTURE.

55. **Relations entre les flux de chaleur et la température ou surtout ses dérivées dans les divers sens : coefficients de conductibilité.** — La théorie exposée dans la dernière leçon relie entre eux les divers flux calorifiques existant en un même endroit, mais sans montrer leur cause déterminante. La définition de la température, comme *niveau calorifique actuel* de chaque corps (p. 94), révèle cette cause. Elle nous montre, en effet, que tous les flux seraient nuls dans une particule, si la température y était uniforme, c'est-à-dire, à très peu près, si l'on y annulait les trois dérivées partielles premières $\frac{du}{d(x, y, z)}$, qui sont, en quelque sorte, les trois *pentes* de la température, à l'endroit considéré, le long d'éléments rectilignes dx, dy, dz parallèles aux coordonnées, pentes définissant évidemment, sans erreur sensible, les inégalités qui affectent le niveau calorifique là où se forment les flux en question. L'un quelconque F de ceux-ci, relatif, par unités d'aire et de temps, à un élément plan fixe mené en (x, y, z), est donc fonction, en premier lieu, des valeurs que reçoivent actuellement au point (x, y, z) les trois quantités $\frac{du}{d(x, y, z)}$, puisque ces valeurs le font s'y annuler quand elles s'annulent à la fois. Et il dépend, en outre, de l'orientation de l'élément plan, ainsi que de la constitution moléculaire et des particularités, qui y définissent l'état physique, notamment de la température absolue $273^\circ + T + u$.

Supposons assez modérées les trois *pentes* $\frac{du}{d(x, y, z)}$, suivant

Digitized by Google

les axes, de la température; et nous pourrons admettre, à titre d'hypothèse toute naturelle, la développabilité des fonctions F de ces trois variables par la formule de Mac-Laurin, ou même la réduction approchée des développements à leurs parties du premier degré. Si donc on appelle $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ neuf certains coefficients, dépendant de la *contexture* de la particule où seront menés les éléments plans, et fonctions aussi de sa température absolue, les trois flux principaux F_x, F_y, F_z relatifs aux axes auront des expressions de la forme

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} F_x &= \mathcal{A}\frac{du}{dx} + \mathcal{F}_1\frac{du}{dy} + \mathcal{E}\frac{du}{dz},\\ F_y &= \mathcal{F}\frac{du}{dx} + \mathcal{B}\frac{du}{dy} + \mathcal{D}_1\frac{du}{dz},\\ F_z &= \mathcal{E}_1\frac{du}{dx} + \mathcal{D}\frac{du}{dy} + \mathcal{C}\frac{du}{dz}. \end{aligned}\right.$$

On les portera dans la formule (27) d'un autre flux quelconque, et celle-ci sera, dès lors, complètement explicite, tout à la fois, par rapport aux dérivées partielles de la température et aux cosinus fixant la direction de l'élément plan considéré.

La grandeur des flux, pour même distribution des températures dans des particules différentes, est en rapport avec ce qu'on appelle la *conductibilité* de leur matière, qualité marquant la vivacité avec laquelle y travaillent les actions moléculaires pour transmettre d'une région aux régions voisines l'agitation calorifique produite quelque part. On appellera donc *coefficients de conductibilité* de la particule, *relatifs aux axes des* x, y, z choisis, les neuf coefficients précédents $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{F}_1$. Comme la température absolue variera généralement assez peu comparativement à sa valeur totale, l'on pourra, sauf erreur relative très petite et négligeable dans le calcul d'un flux quelconque, leur attribuer des valeurs moyennes, indépendantes de u; et ce seront alors des *constantes spécifiques,* ou propres à la matière de la particule, comme est déjà (p. 97) la capacité calorifique C par unité de volume.

56. Condition imposée à ces coefficients, par le fait d'une chute positive de température le long du courant de chaleur. — Représentons-nous dans le corps la famille des *surfaces isothermes,*

Digitized by Google

c'est-à-dire d'égale température ou *de niveau* calorifique, qui ont l'équation $u = \text{const.}$, et dont, à l'époque t, une passe toujours par le point quelconque (x, y, z). On pourra généralement, à l'intérieur d'une particule, les réduire à leurs plans tangents, d'une direction à très peu près la même dans toute son étendue et définie par les cosinus directeurs de leurs normales, proportionnels aux trois dérivées partielles $\frac{du}{d(x, y, z)}$. La température u croîtra de l'un à l'autre de ces plans isothermes, si on les traverse en suivant des normales consécutives dn ayant leurs projections dx, dy, dz sur les axes *de mêmes signes* que ces dérivées. Car appelons $\frac{dn}{\Delta_1 u}$ le rapport *positif* commun de dx, dy, dz à $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$: nous aurons

$$dx = \frac{dn}{\Delta_1 u}\frac{du}{dx}, \qquad dy = \frac{dn}{\Delta_1 u}\frac{du}{dy}, \qquad dz = \frac{dn}{\Delta_1 u}\frac{du}{dz};$$

d'où

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{ou} \quad dn^2 = \frac{dn^2}{(\Delta_1 u)^2}\left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$(32) \qquad (\Delta_1 u)^2 = \frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}.$$

Et, le long de dn, l'accroissement du de u sera

$$(33) \qquad \left\{\begin{aligned} du &= \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz \\ &= \frac{dn}{\Delta_1 u}\left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right) = (\Delta_1 u)\,dn. \end{aligned}\right.$$

Ainsi, d'une part, la quantité *positive* $\Delta_1 u$ a l'expression

$$\sqrt{\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}};$$

elle représente ce que Lamé appelle le *paramètre différentiel du premier ordre* de la fonction u [1]. D'autre part, d'après (33),

---

[1] *Voir*, au sujet de ce paramètre différentiel et de sa notion naturelle, le Tome Ier (fascicule II) de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, p. 52* à 62*.

Digitized by Google

l'on a $du = (\Delta_1 u)\, dn$, ou

$$\Delta_1 u = \frac{du}{dn}; \tag{34}$$

et le radical positif $\Delta_1 u$ exprime la dérivée de u le long de la normale dn. La température croît donc, à partir de la surface isotherme passant en (x, y, z), du côté où l'on a mené sa normale dn, tandis qu'elle décroît en arrière ou en deçà de cette normale.

Cela posé, nous savons que la chaleur traverse toujours les surfaces isothermes en passant d'une température à une autre plus basse. Autrement dit, le courant de chaleur LM (p. 112) se trouve, en M, par rapport à la surface isotherme, du côté où l'on a tiré la normale dn; et la température croît de M vers L, le long d'un chemin infiniment petit $MM' = dm$ ayant les cosinus directeurs $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ définis précédemment (p. 111). Or cet accroissement du de u, le long de dm dont les projections sur les axes sont dès lors

$$dx = dm\cos\lambda, \qquad dy = dm\cos\mu, \qquad dz = dm\cos\nu,$$

est évidemment

$$du = \left(\frac{du}{dx}\cos\lambda + \frac{du}{dy}\cos\mu + \frac{du}{dz}\cos\nu\right) dm;$$

d'où il résulte pour la dérivée correspondante $\frac{du}{dm}$, d'après les formules (28) des trois cosinus directeurs (p. 111),

$$\frac{du}{dm} = \frac{1}{F_m}\left(F_x\frac{du}{dx} + F_y\frac{du}{dy} + F_z\frac{du}{dz}\right). \tag{35}$$

Nous appellerons 2Φ le trinome du second membre, en posant ainsi, vu, finalement, les expressions (31) de F_x, F_y, F_z,

$$\left\{\begin{aligned} 2\Phi &= F_x\frac{du}{dx} + F_y\frac{du}{dy} + F_z\frac{du}{dz} \\ &= \mathcal{A}\frac{du^2}{dx^2} + \mathcal{B}\frac{du^2}{dy^2} + \mathcal{C}\frac{du^2}{dz^2} + (\mathcal{D} + \mathcal{D}_1)\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} \\ &\qquad + (\mathcal{E} + \mathcal{E}_1)\frac{du}{dz}\frac{du}{dx} + (\mathcal{F} + \mathcal{F}_1)\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

C'est, comme on voit, une expression entière et homogène du second degré en $\frac{du}{d(x, y, z)}$, dont les six coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,

Digitized by Google

$\mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1$, $\mathcal{E} + \mathcal{E}_1$, $\mathcal{F} + \mathcal{F}_1$ se forment très simplement au moyen des neuf coefficients de conductibilité relatifs aux axes.

Alors la formule (35), multipliée par F_m, devient

$$F_m \frac{du}{dm} = 2\Phi; \tag{37}$$

ce qui montre que l'expression entière et homogène 2Φ représente le produit du courant F_m de chaleur par la dérivée de la température suivant la direction dm qui le *remonte*. Ce produit ou, par conséquent, l'expression 2Φ, est donc une *quantité physique*, ayant sa valeur indépendante du choix des axes. Nous devons exprimer que cette quantité physique, dont le signe est celui de $\frac{du}{dm}$, ne peut jamais devenir négative, et qu'elle ne prend même la valeur zéro qu'autant que ses trois variables $\frac{du}{d(x, y, z)}$ s'annulent ensemble. L'inégalité à vérifier sera donc

$$2\Phi > 0. \tag{38}$$

On sait former les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... d'une pareille fonction homogène et entière du second degré, pour qu'elle soit ainsi positive essentiellement. Les plus importantes de ces conditions, les seules dont nous aurons besoin, sont les trois inégalités évidentes :

$$\mathfrak{A} > 0, \qquad \mathfrak{B} > 0, \qquad \mathfrak{C} > 0. \tag{39}$$

57. Expression du courant de chaleur dans une particule isotrope. — Traitons d'abord le cas auquel se sont bornées les études de Fourier et de Poisson sur la chaleur, celui des corps que Cauchy appelle *isotropes*.

Pour nous figurer nettement ce que peut être une particule matérielle isotrope, imaginons un observateur infiniment petit, pouvant se mouvoir à l'intérieur de cette particule, s'y orienter dans tous les sens, et capable d'en saisir l'*aspect moléculaire*, c'est-à-dire les circonstances offertes par l'arrangement au moins général ou moyen des molécules qu'il verra soit devant lui, soit à droite, soit à gauche, etc., jusqu'aux distances de l'ordre de grandeur des dimensions d'un élément plan. Alors on dira la particule

Digitized by Google

isotrope, si, la température étant supposée uniforme, cet observateur constate autour de lui le même aspect moléculaire, s'il voit toujours, du moins en moyenne, les mêmes circonstances ou, en quelque sorte, le même tableau microscopique, de quelque façon qu'il s'oriente.

Dans ces conditions, et supposant maintenant la température u devenue graduellement variable d'un point à l'autre, construisons l'élément plan isotherme qui passe par les pieds de l'observateur, dont nous imaginerons en même temps le corps et la tête placés sur la perpendiculaire dn, menée à cette surface du côté où u grandit. Alors, le changement de température ayant évidemment apporté les mêmes modifications sur toute l'étendue de chaque couche isotherme normale à dn, l'observateur constatera, en moyenne, les mêmes groupements et mouvements moléculaires, de quelque angle qu'il tourne autour de cette normale; et, par suite, le courant de chaleur, parfaitement déterminé, résultant de ces mouvements moléculaires, qui traverse à ses pieds la surface isotherme sur laquelle il repose, devra affecter une direction toujours située de même par rapport à lui, ou qui ne soit pas tantôt à sa droite et tantôt à sa gauche. Or une seule est dans ce cas, savoir, celle de la normale dn. Donc le flux maximum F_m, censé représenté par une droite ML remontant le courant, comme dans la dernière leçon (p. 112), sera dirigé suivant dn, ou aura les trois cosinus directeurs $\frac{1}{\Delta_1 u}\frac{du}{d(x, y, z)}$.

D'ailleurs, le mode de variation de u ne dépendant, à l'intérieur de la particule, que de la dérivée $\frac{du}{dn}$, les formules (31), si on les applique avec des axes locaux pris, l'un, suivant dn, et, les deux autres, tangents à l'élément plan isotherme qui passe par (x, y, z), se réduiront à une seule, celle de F_m, réduite elle-même, dans son second membre, au seul terme en $\frac{du}{dn}$. Appelons K le coefficient de conductibilité, évidemment positif, qui figure dans ce terme unique, en observant que l'isotropie du milieu, c'est-à-dire sa parité de constitution en tous sens dans l'état primitif où la température était uniforme, rend la conductibilité indépendante de la direction de l'élément plan isotherme en (x, y, z), et fait, par suite, du coefficient K qui la mesure, une simple *con-*

Digitized by Google

stante spécifique de la matière de la particule. Nous aurons donc

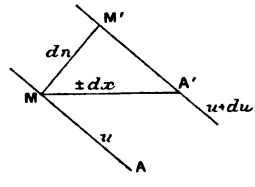
$$(40) \qquad F_m = K\frac{du}{dn} = K\Delta_1 u.$$

58. **Formule d'un flux quelconque, dans une telle particule.** — Enfin, vu les expressions des trois cosinus directeurs de F_m ou de dn, qui sont $\frac{1}{\Delta_1 u}\frac{du}{d(x, y, z)}$, les trois projections F_x, F_y, F_z de F_m sur les axes nous donneront, comme expression de ces trois flux principaux relatifs aux axes,

$$(41) \qquad F_x = K\frac{du}{dx}, \qquad F_y = K\frac{du}{dy}, \qquad F_z = K\frac{du}{dz}.$$

Ces dernières formules se déduisent encore de (40), en construisant à l'extrémité M′ de la petite normale dn, issue de M, l'élément plan isotherme M′A′, dont la température est $u + du$, celle de la surface isotherme MA étant u. Soit alors MA′ un élément rectiligne parallèle aux x, et que l'on pourra appeler soit dx, s'il est décrit, à partir de M, dans le sens des x croissants, soit $-dx$, dans le cas contraire. La formule (30) (p. 111) donnera, pour le

Fig. 11.



flux, en M, sur l'élément plan dont la normale est MA′, $F_m \cos M'MA'$ ou $K\frac{du}{dn}\cos M'MA'$. Or on a, dans le triangle M′MA′, $dn = MA' \cos M'MA'$; et, d'autre part, l'accroissement de la température est le même le long de MA′ que le long de dn. Donc le flux $F_m \cos M'MA'$ peut s'écrire plus simplement $K\frac{du}{MA'}$ ou $\pm K\frac{du}{dx}$; et comme il n'est évidemment autre que $\pm F_x$, l'on a bien la première formule (41), où dx peut désigner, comme on voit, une petite droite de direction quelconque.

Donc, *dans un corps isotrope, le flux de chaleur à travers*

Digitized by Google

un élément plan quelconque égale, par unités d'aire et de temps, le produit de la conductibilité K *par la dérivée de la température suivant la normale à l'élément plan.*

A travers l'élément plan qui a pour normale un élément rectiligne ds faisant des angles donnés α, β, γ avec les x, y, z positifs, ou ayant les projections $d(x, y, z) = ds\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ sur les axes, il viendra

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} F = K\frac{du}{ds} &= K\left(\frac{du}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{ds}\right) \\ &= K\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right). \end{aligned}\right.$$

C'est bien, en effet, ce que donne la formule (27) (p. 110), si l'on y transporte les valeurs (41) de F_x, F_y, F_z.

59. **Expression des flux de chaleur dans une particule de contexture symétrique.** — Passons au cas d'une matière non isotrope, mais *à contexture symétrique*. Et d'abord expliquons ce qu'il faudra entendre par ce mot.

Nous dirons qu'un axe, mené par un point M d'une particule matérielle, et que nous appellerons ici MZ, est un axe de symétrie de contexture ou un *axe principal de symétrie,* si une rotation de 180°, effectuée par la particule autour de cet axe, l'amène à coïncider avec elle-même quant à sa contexture interne, c'est-à-dire lui fait reprendre le même aspect qu'avant la rotation, du moins la température étant supposée uniforme. Il est évident qu'alors, si l'on associe à MZ deux autres axes rectangulaires MX, MY, une rotation de 180° imprimée aux trois axes autour de MZ les amène, par rapport à la particule, dans une disposition pareille à la première. Autrement dit, à température uniforme, le petit observateur dont il est parlé ci-dessus reverra le même aspect moléculaire après un demi-tour sur lui-même, s'il a les pieds à l'origine M et la tête suivant MZ.

Enfin, la contexture de la particule sera dite *symétrique,* s'il existe deux pareils axes rectangulaires de symétrie, comme MZ et MX, par exemple : cas où nous verrons que l'axe des Y, normal à ces deux, se comportera lui-même comme un axe de symétrie principal.

Pour arriver tout de suite aux résultats les plus importants,

Digitized by Google

supposons les trois axes MX, MY, MZ axes principaux de symétrie, et, considérant d'abord spécialement MZ, imaginons que les éléments plans isothermes lui soient normaux. L'observateur dont il vient d'être question verra évidemment le même aspect moléculaire moyen et les mêmes mouvements calorifiques, s'il tourne de 180° autour de MZ, c'est-à-dire s'il se retourne pour regarder derrière lui. Donc, le courant F_m de chaleur, qui passe par ses pieds, ne pourra pas plus être devant lui que derrière, pas plus à sa droite qu'à sa gauche, et il devra coïncider avec MZ. C'est dire que ses projections F_X, F_Y sur MX et MY s'annulent, dès que la surface isotherme en M passe par ces axes, ou dès que l'on a $\frac{du}{dX} = 0$ et $\frac{du}{dY} = 0$. Donc, si l'on suppose la particule rapportée à ses axes de symétrie ou à d'autres parallèles à ceux-là, et, par suite, les flux principaux correspondants F_X, F_Y, F_Z exprimés linéairement au moyen des dérivées $\frac{du}{d(X, Y, Z)}$, les expressions de F_X et F_Y devront se réduire à zéro en même temps que les deux dérivées $\frac{du}{dX}$ et $\frac{du}{dY}$. Ainsi F_X, F_Y sont privés du terme en $\frac{du}{dZ}$. On verrait de même, en supposant les plans isothermes normaux soit à MX, soit à MY, que F_Y, F_Z ne contiennent pas le terme en $\frac{du}{dX}$, ni F_Z, F_X le terme en $\frac{du}{dY}$. Donc F_X, F_Y, F_Z sont monomes respectivement en $\frac{du}{dX}$, $\frac{du}{dY}$, $\frac{du}{dZ}$; et, en appelant K′, K″, K‴, trois coefficients de conductibilité distincts, on aura

$$(43) \qquad F_X = K' \frac{du}{dX}, \qquad F_Y = K'' \frac{du}{dY}, \qquad F_Z = K''' \frac{du}{dZ}.$$

Les coefficients K′, K″, K‴, évidemment positifs, sont dits les trois *coefficients principaux de conductibilité* du corps, ou, plus simplement, ses *trois conductibilités principales*.

60. **Cas où l'on ne donne que deux axes principaux de symétrie.** — La démonstration précédente suppose dès l'abord trois axes principaux rectangulaires de symétrie de contexture. Quand on n'en donne que deux, MZ et MX, par exemple, il ne suffit plus de remarquer que la normalité, à l'un d'eux, de l'élément iso-

Digitized by Google

therme mené par M entraîne celle du courant sur cet élément plan. Il est alors préférable d'observer, par exemple, sans faire aucune hypothèse sur la direction des surfaces isothermes, qu'une rotation de 180° autour de MZ, imprimée à l'observateur considéré déjà ci-dessus, place cet observateur dans une situation où il perçoit la même constitution physique que dans sa situation première, du moins lorsque règne l'uniformité de température. Donc une rotation de 180° imprimée aux axes coordonnés des X, Y, Z, autour de celui des Z, donne un système d'axes par rapport auquel les formules des flux principaux sont les mêmes que par rapport aux premiers.

En d'autres termes, les renversements simultanés de sens des X et des Y, qui conduisent évidemment à remplacer F_X, F_Y par leurs opposés $-F_X$, $-F_Y$ et $\frac{du}{d(X, Y)}$ par $-\frac{du}{d(X, Y)}$, sans rien changer à F_Z ni à $\frac{du}{dZ}$, devront laisser invariables les formules des flux principaux. Il faut donc que, dans F_X et dans F_Y, les termes qui ne changent pas de signe, par ces simples changements de X en $-X$ et de Y en $-Y$, aient leurs coefficients nuls, tandis que ce sont, au contraire, ceux qui en changent qui ne pourront pas figurer dans F_Z. Ainsi, F_X, F_Y seront privés du terme en $\frac{du}{dZ}$ et F_Z sera privé des termes en $\frac{du}{dX}$, $\frac{du}{dY}$. Il y a donc, en tout, par le fait de l'existence de l'axe de symétrie MZ, quatre coefficients de conductibilité, sur neuf, qui s'annulent.

La présence du second axe principal de symétrie MX entraînera, de même, l'annulation du coefficient de $\frac{du}{dX}$ dans F_Y et du coefficient de $\frac{du}{dY}$ dans F_X. Dès lors, F_X, F_Y, F_Z seront monomes respectivement en $\frac{du}{dX}$, $\frac{du}{dY}$, $\frac{du}{dZ}$; et l'on aura bien les formules (43), absolument comme si l'on avait supposé aussi axe de symétrie principal le troisième axe lui-même, MY.

61. **La symétrie par rapport à des axes principaux équivaut à la symétrie par rapport aux plans qui leur sont perpendiculaires.** — On arriverait encore aux mêmes formules en admettant des plans de symétrie au lieu d'axes de symétrie principaux,

Digitized by Google

par exemple le plan de symétrie de contexture XMY au lieu de l'axe principal MZ.

Le plan XMY est dit *un plan de symétrie de contexture de la particule,* quand, dans le cas d'uniformité de la température u, les mêmes circonstances de structure interne se présentent de part et d'autre de ce plan, aux points deux à deux symétriques par rapport à lui. Il est clair qu'alors le renversement de l'axe des Z, ou le changement de Z en $-Z$, qui conduit à remplacer F_Z par $-F_Z$ et transforme d'ailleurs $\frac{du}{dZ}$ en $-\frac{du}{dZ}$, doit laisser subsister les mêmes formules pour les flux principaux. Donc F_X, F_Y ne pourront pas contenir le terme en $\frac{du}{dZ}$, qui change de signe, ni, F_Z, les termes en $\frac{du}{dX}$ et $\frac{du}{dY}$, qui n'en changent pas. Ainsi, les formules des flux principaux subissent exactement les mêmes réductions, soit quand l'axe des Z est un axe principal, soit quand le plan des XY est un plan de symétrie.

Il suffira donc qu'un second plan coordonné, celui des YZ par exemple, soit également un plan de symétrie, pour que les formules de F_X, F_Y, F_Z se réduisent respectivement à leurs termes en $\frac{du}{dX}$, $\frac{du}{dY}$, $\frac{du}{dZ}$, comme si le troisième plan coordonné était également un plan de symétrie de contexture.

En résumé, *dans un milieu à constitution symétrique,* l'adoption d'axes coordonnés parallèles aux axes de symétrie principaux, ou de plans coordonnés parallèles aux plans de symétrie, conduit à des formules des *flux principaux où chaque flux est proportionnel à la dérivée de la température par rapport à la coordonnée correspondante,* le coefficient de cette proportionnalité, *coefficient de conductibilité principal,* étant d'ailleurs différent pour les trois flux.

62. Formules de transformation pour les flux principaux, quand on change d'axes coordonnés. — Il reste à voir ce que seraient les formules des flux principaux, F_x, F_y, F_z, si l'on adoptait des coordonnées, encore rectangulaires, x, y, z, de direction autre que les coordonnées X, Y, Z prises par rapport aux axes de symétrie de la particule. Appelons a, b, c les cosinus directeurs du nouvel axe

Digitized by Google

des x par rapport aux anciens axes des X, Y, Z; et, de même, a', b', c' les cosinus directeurs du nouvel axe des y, enfin a'', b'', c'' ceux du nouvel axe des z. C'est ce qu'indiquera très simplement le Tableau suivant, *à double entrée,* dont les colonnes verticales sont consacrées aux anciens axes et les colonnes horizontales aux nouveaux, avec les cosinus correspondants inscrits aux croisements des colonnes :

	X	Y	Z
x	a	b	c
y	a'	b'	c'
z	a''	b''	c''

La formule (27) (p. 110), appliquée successivement aux éléments plans dont les normales dx, dy, dz ont les cosinus directeurs des nouveaux axes, donnera

$$(44)\quad F_x = aF_X + bF_Y + cF_Z,\quad F_y = a'F_X + b'F_Y + c'F_Z,\quad F_z = a''F_X + b''F_Y + c''F_Z.$$

On y remplacera d'abord F_X, F_Y, F_Z par leurs valeurs (43), et ensuite, dans celles-ci, les dérivées de u en X, Y, Z par leurs expressions en fonction des dérivées de u le long des éléments principaux dx, dy, dz relatifs aux nouveaux axes. Or nous avons vu plusieurs fois que la dérivée de u le long d'un élément rectiligne ds, à cosinus directeurs $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ par rapport aux x, y, z, était

$$(45)\qquad \frac{du}{ds} = \frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma.$$

Donc les dérivées de u suivant les éléments dX, dY, dZ, qui ont par rapport aux x, y, z les cosinus directeurs (a, a', a''), (b, b', b''), (c, c', c''), recevront les expressions données par la formule triple

$$(46)\qquad \frac{du}{d(X, Y, Z)} = (a, b, c)\frac{du}{dx} + (a', b', c')\frac{du}{dy} + (a'', b'', c'')\frac{du}{dz}.$$

La substitution de ces valeurs dans (44), après remplacement de F_X, F_Y, F_Z par $K'\frac{du}{dX}$, $K''\frac{du}{dY}$, $K'''\frac{du}{dZ}$, conduit évidemment à des

Digitized by Google

formules rentrant dans le type (31) (p. 115), mais simplifié par les trois égalités respectives de $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{F}_1$ à $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$. On trouve, en d'autres termes, pour F_x, F_y, F_z, des expressions de la forme

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned} F_x &= \mathfrak{A}\frac{du}{dx} + \mathfrak{F}\frac{du}{dy} + \mathfrak{E}\frac{du}{dz},\\ F_y &= \mathfrak{F}\frac{du}{dx} + \mathfrak{B}\frac{du}{dy} + \mathfrak{D}\frac{du}{dz},\\ F_z &= \mathfrak{E}\frac{du}{dx} + \mathfrak{D}\frac{du}{dy} + \mathfrak{C}\frac{du}{dz},\end{aligned}\right.$$

où les six coefficients de conductibilité $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ ont les valeurs

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{A} = K'a^2 + K''b^2 + K'''c^2, \quad \mathfrak{B} = K'a'^2 + \ldots, \quad \mathfrak{C} = K'a''^2 + \ldots,\\ &\mathfrak{D} = K'a'a'' + K''b'b'' + K'''c'c'', \quad \mathfrak{E} = K'a''a + \ldots, \quad \mathfrak{F} = K'aa' + \ldots.\end{aligned}\right.$$

Un milieu symétrique ne comporte donc, rapporté à des axes rectangulaires quelconques, que *six* coefficients distincts de conductibilité, au lieu des *neuf* qui semblent possibles dans les cas de la contexture la plus générale.

C'est précisément à des formules de cette forme (47), trouvées pour la première fois par Duhamel, que conduit l'hypothèse du *rayonnement particulaire* (p. 7), en ramenant les flux à des passages de chaleur, d'une molécule à une autre, *effectués comme si le couple moléculaire considéré était seul.*

On démontrerait assez aisément, au moyen des formules précédentes (44) et (46), qu'il suffit qu'un corps admette cette forme, (47), des flux de chaleur, dans un système rectangulaire d'axes, pour l'admettre dans tous. Nous reconnaîtrons cette propriété presque sans calculs, dans la prochaine leçon. Mais prouvons dès celle-ci que, dans toute particule où la forme (47) des flux de chaleur existe pour tous les systèmes rectangulaires d'axes, il y a un de ces systèmes, dont on peut appeler X, Y, Z les coordonnées, où les *conductibilités indirectes* $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ s'annulent et où, par conséquent, il ne subsiste que les *conductibilités directes* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, alors identiques à ces *conductibilités principales* que nous désignons par K', K'', K'''. En d'autres termes, les milieux où les flux de chaleur n'admettent, dans les divers systèmes d'axes rectangulaires, que les six coefficients de conductibilité $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$,

Digitized by Google

$\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, sont nécessairement symétriques *au point de vue de la conductibilité calorifique :* ils peuvent être censés posséder trois axes principaux rectangulaires de symétrie, ou trois plans rectangulaires de symétrie de contexture.

63. Des conductibilités d'un milieu quelconque suivant le courant de chaleur et suivant la pente des températures. — Pour établir le plus simplement possible cette propriété, revenons un instant au cas d'une contexture quelconque, régi par les formules (31) à (39), afin d'y remarquer deux flux particulièrement importants et simples, qui ne tiennent pas au choix des axes. Nous avons déjà signalé l'un deux, savoir le flux maximum ou courant de chaleur F_m, qui a les projections F_x, F_y, F_z sur les axes des x, y, z et se trouve dirigé à l'encontre de la petite droite dm le long de laquelle nous avons évalué (p. 117) la dérivée toujours *physiquement positive* $\frac{du}{dm}$ de la température. Le second flux, non moins important, que nous appellerons F_n, est celui qui traverse l'élément plan isotherme $u =$ const., en venant du côté où a été menée sa normale infiniment petite dn, à cosinus directeurs $\frac{1}{\Delta_1 u}\frac{du}{d(x, y, z)}$, et donnant lieu à une dérivée $\frac{du}{dn}$ ou $\Delta_1 u$ essentiellement positive de la température. Celui-ci, F_n, est, d'après la formule (27) (p. 110), et vu, finalement, (36),

$$(49) \qquad F_n = \frac{1}{\Delta_1 u}\left(F_x\frac{du}{dx} + F_y\frac{du}{dy} + F_z\frac{du}{dz}\right) = \frac{2\Phi}{\Delta_1 u} = \frac{2\Phi}{\frac{du}{dn}},$$

tandis que la formule (37) donne

$$(50) \qquad F_m = \frac{2\Phi}{\frac{du}{dm}}.$$

Or, il est naturel d'évaluer ces deux flux F_m, F_n au moyen de la dérivée de la température le long de la normale respective dm ou dn à l'élément plan correspondant, c'est-à-dire de poser, en introduisant des rapports convenables $\mathcal{K}$ et K,

$$(51) \qquad F_m = \mathcal{K}\frac{du}{dm}, \qquad F_n = K\frac{du}{dn}.$$

Digitized by Google

Comme le numérateur 2Φ, dans (49) et (50), est homogène du second degré par rapport aux dérivées partielles de u le long d'éléments rectilignes dx, dy, dz, et que, de plus, les dénominateurs $\frac{du}{dm}$, $\frac{du}{dn}$ sont des dérivées de u suivant les chemins dm et dn, dérivées par suite homogènes aux précédentes en fonction desquelles elles s'expriment toujours, les deux rapports respectifs $\mathcal{K}$ et K, savoir :

$$(52) \qquad \mathcal{K} = \frac{F_m}{\frac{du}{dm}} = \frac{2\Phi}{\left(\frac{du}{dm}\right)^2}, \qquad K = \frac{F_n}{\frac{du}{dn}} = \frac{2\Phi}{\left(\frac{du}{dn}\right)^2},$$

seront homogènes et de degré zéro par rapport aux mêmes dérivées de u en x, y, z. Pour chaque direction soit du courant de chaleur, soit de l'élément plan isotherme ou de sa normale dn, les rapports mutuels des trois dérivées de u en x, y, z se trouveront invariables, et, par suite, les quotients $\mathcal{K}$, K auront leurs valeurs constantes. Ce seront donc de simples coefficients de conductibilité, dépendant en général, comme $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{F}_1$, des directions auxquelles ils se rapportent. Nous les appellerons, l'un, $\mathcal{K}$, le coefficient de conductibilité *suivant le courant,* et l'autre, K, le coefficient de conductibilité *suivant la pente des températures;* car dn est, en M, l'élément de la *ligne de pente* de u, ou ligne suivant laquelle u *croît* le plus vite.

64. Lois de la conductibilité suivant la pente des températures. — Nous nous occuperons plus loin de la conductibilité $\mathcal{K}$ suivant le courant. Considérons seulement, ici, la conductibilité K *suivant la pente des températures,* pour l'évaluer en fonction des angles, que j'appellerai α, β, γ, de *la ligne dn de cette pente* avec les trois axes positifs des x, y, z. La triple formule

$$\cos(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\Delta_1 u} \frac{du}{d(x, y, z)},$$

où $\Delta_1 u = \frac{du}{dn}$, donne

$$(53) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dn}\cos\alpha, \qquad \frac{du}{dy} = \frac{du}{dn}\cos\beta, \qquad \frac{du}{dz} = \frac{du}{dn}\cos\gamma;$$

et la seconde valeur (52) de K devient, vu la dernière expres-

Digitized by Google

sion (36) de 2Φ,

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} K = \mathcal{A}\cos^2\alpha + \mathcal{B}\cos^2\beta + \mathcal{C}\cos^2\gamma + (\mathcal{D}+\mathcal{D}_1)\cos\beta\cos\gamma \\ + (\mathcal{E}+\mathcal{E}_1)\cos\gamma\cos\alpha + (\mathcal{F}+\mathcal{F}_1)\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}\right.$$

Le second membre, ayant la forme de 2Φ avec d'autres variables, est évidemment un sextinome essentiellement positif en $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Nous pouvons donc considérer sa racine carrée positive $\sqrt{K}$ et prendre, à partir du point intérieur M de la particule, suivant la ligne dn de la plus grande pente (montante) des températures, une droite ι égale à l'inverse, toujours fini, de la racine carrée ainsi obtenue. Si ξ, η, ζ désignent les projections de $\frac{1}{\sqrt{K}}$ sous les angles α, β, γ, c'est-à-dire les coordonnées de l'extrémité de cette droite, par rapport à des axes émanés de M dans les directions des x, y, z, on aura

cosinus non susceptibles de s'annuler à la fois

$$(55)\qquad \xi = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{K}},\qquad \eta = \frac{\cos\beta}{\sqrt{K}},\qquad \zeta = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{K}};$$

et l'élimination des trois cosinus transformera l'équation (54) en celle-ci, pour représenter la surface, à coordonnées courantes ξ, η, ζ, qui a dans tous les sens les rayons *finis* ι issus de l'origine,

$$(56)\quad \mathcal{A}\xi^2 + \mathcal{B}\eta^2 + \mathcal{C}\zeta^2 + (\mathcal{D}+\mathcal{D}_1)\eta\zeta + (\mathcal{E}+\mathcal{E}_1)\zeta\xi + (\mathcal{F}+\mathcal{F}_1)\xi\eta = 1.$$

Cette surface du second degré, se trouvant ainsi fermée, est un ellipsoïde décrit autour du centre M. Donc, *toute particule a pour conductibilité, suivant la pente des températures, le quotient de l'unité par le carré du demi-diamètre de l'ellipsoïde* (56), *tangent à la ligne dn de cette pente* (*montante*) *des températures, ligne normale aux éléments plans isothermes de la particule, et qui peut présenter toutes les orientations autour du point de la particule pris comme centre de l'ellipsoïde.*

65. **Existence, dans toute particule, de trois axes rectangulaires de conductibilité, qui constituent une extension des axes principaux d'une particule symétrique.** — L'ellipsoïde précédent (56), exprimant une propriété physique du milieu, ne dépend nullement des axes rectangulaires choisis. Il restera donc le même si, après avoir

Digitized by Google

déterminé ses trois axes de figure, on adopte ceux-ci, que nous désignerons par MX, MY, MZ, comme axes coordonnés. Or, alors, son équation (56), où X, Y, Z remplaceront ξ, η, ζ, sera débarrassée des trois rectangles des variables. Donc, avec ce système d'axes, les sommes $\mathfrak{D}+\mathfrak{D}_1$, $\mathcal{E}+\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}+\mathcal{F}_1$, coefficients des rectangles en question, sont nulles : autrement dit, *les six conductibilités indirectes,* que nous appellerons aussi quelquefois *conductibilités latérales, y sont, deux à deux, égales et contraires.*

Le polynome 2Φ s'y réduisant d'ailleurs, d'après (36) (p. 117), au trinome

$$\mathfrak{A}\frac{du^2}{dX^2}+\mathfrak{B}\frac{du^2}{dY^2}+\mathfrak{C}\frac{du^2}{dZ^2},$$

les trois conditions (39), nécessaires toujours, y suffisent pour que 2Φ ait toutes ses valeurs plus grandes que zéro. Nous rappellerons le plus simplement possible que les trois conductibilités *directes*, alors seules en jeu dans l'expression de K, sont essentiellement positives, en les remplaçant par les carrés de leurs racines carrées positives, que nous noterons elles-mêmes a, b, c.

Enfin, il est clair que ce système sera généralement unique, l'ellipsoïde (56) admettant un seul système d'axes de figure, à moins qu'il ne soit de révolution.

Bref, *il existera toujours pour la particule un système d'axes des* X, Y, Z, *en général unique, tel, que les formules des trois flux principaux correspondants seront, au lieu de* (31),

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} F_X &= a^2\frac{du}{dX}-\mathcal{F}\frac{du}{dY}+\mathcal{E}\frac{du}{dZ},\\ F_Y &= \mathcal{F}\frac{du}{dX}+b^2\frac{du}{dY}-\mathfrak{D}\frac{du}{dZ},\\ F_Z &= -\mathcal{E}\frac{du}{dX}+\mathfrak{D}\frac{du}{dY}+c^2\frac{du}{dZ},\end{aligned}\right.$$

avec les coefficients des conductibilités indirectes ou latérales ainsi égaux et contraires deux à deux. Nous appellerons *axes de conductibilité de la particule* ces trois axes des X, Y, Z.

Il est facile de voir ce que sont ces axes dans les particules qui admettent les formules (47) des flux de chaleur, c'est-à-dire où les conductibilités indirectes sont égales deux à deux. Alors, les conditions $\mathfrak{D}_1=-\mathfrak{D}$, $\mathcal{E}_1=-\mathcal{E}$, $\mathcal{F}_1=-\mathcal{F}$, propres au système des

Digitized by Google

coordonnées X, Y, Z, s'y trouvant vérifiées en même temps que les conditions $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$ vraies, par hypothèse, dans un système rectangulaire quelconque, il vient identiquement

$$\mathfrak{D} = 0, \qquad \mathcal{E} = 0, \qquad \mathfrak{F} = 0;$$

et les équations (57) se réduisent à la forme (43) (p. 122) exprimant la symétrie du milieu par rapport aux axes principaux MX, MY, MZ.

Donc, *les milieux où les six conductibilités indirectes sont égales deux à deux se comportent, au point de vue de la propagation de la chaleur, comme s'ils étaient symétriques :* propriété énoncée plus haut et qui se trouve ainsi démontrée. De plus, les axes de conductibilité de ces milieux, c'est-à-dire ceux par rapport auxquels les formules des flux de chaleur prennent les formes relativement simples (57), ne sont autres que leurs axes principaux de symétrie ou simplement leurs axes principaux, donnant $\mathfrak{D} = 0$, $\mathcal{E} = 0$, $\mathfrak{F} = 0$, avec $a^2 = K'$, $b^2 = K''$, $c^2 = K'''$.

Digitized by Google

NEUVIÈME LEÇON.

POTENTIEL DES FLUX DANS UNE PARTICULE SYMÉTRIQUE, ET CONSTRUCTION DES COURANTS DE CHALEUR DANS UNE PARTICULE QUELCONQUE.

66. Existence et signification du potentiel des flux de chaleur, dans les milieux à conductibilités indirectes égales deux à deux. — Quand il existe, pour une particule donnée, un système d'axes rectangulaires donnant les trois relations $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$, c'est-à-dire réduisant les formules linéaires des flux de chaleur à la forme (47) (p. 126), il y a évidemment égalité des dérivées respectives de F_y en $\frac{du}{dz}$ et de F_z en $\frac{du}{dy}$, de F_z en $\frac{du}{dx}$ et de F_x en $\frac{du}{dz}$, enfin de F_x en $\frac{du}{dy}$ et de F_y en $\frac{du}{dx}$. D'où il suit que l'expression

$$F_x\, d\frac{du}{dx} + F_y\, d\frac{du}{dy} + F_z\, d\frac{du}{dz} \tag{58}$$

est la différentielle exacte d'une fonction homogène et entière du second degré par rapport aux trois variables $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$. Les trois dérivées partielles premières de celle-ci, F_x, F_y, F_z, multipliées par les variables correspondantes $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ et ajoutées, reproduiront, d'après un théorème d'Euler, bien connu, la fonction homogène elle-même, multipliée par son degré d'homogénéité, 2.

Donc cette fonction est identiquement la moitié, Φ, de l'expression $F_x \frac{du}{dx} + F_y \frac{du}{dy} + F_z \frac{du}{dz}$, c'est-à-dire du sextinome essentiellement positif 2Φ que nous avons eu déjà à considérer et

Digitized by Google

dont le troisième membre de (36) (p. 117) constitue le développement.

Nous l'appellerons le *potentiel des flux de chaleur*. La formule (37) montre qu'elle a une signification physique complètement indépendante des axes coordonnés qui y ont conduit : cette fonction Φ égale la moitié du produit du courant F_m de chaleur par la dérivée $\frac{du}{dm}$ de la température le long de la droite dm remontant le courant.

67. **Extension des propriétés de ce potentiel à tous les systèmes de coordonnées rectangles.** — D'ailleurs, la propriété qui la définit, savoir

$$(59) \qquad F_x = \frac{d\Phi}{d\frac{du}{dx}}, \qquad F_y = \frac{d\Phi}{d\frac{du}{dy}}, \qquad F_z = \frac{d\Phi}{d\frac{du}{dz}},$$

dès qu'elle existe pour un système spécial d'axes rectangulaires, est vérifiée aussi dans tous les autres systèmes rectangulaires.

Supposons, par exemple, que l'on ait, dans un premier système, où les coordonnées s'appelleront X, Y, Z,

$$(60) \qquad F_X = \frac{d\Phi}{d\frac{du}{dX}}, \qquad F_Y = \frac{d\Phi}{d\frac{du}{dY}}, \qquad F_Z = \frac{d\Phi}{d\frac{du}{dZ}}.$$

Les formules (44) et (46) de la dernière leçon (p. 125) donneront, dans tout autre système où x, y, z désigneront les coordonnées, savoir, les premières, ou (44),

$$F_x = aF_X + bF_Y + cF_Z, \qquad F_y = \ldots, \qquad F_z = \ldots;$$

et les autres, (46),

$$a = \frac{d\frac{du}{dX}}{d\frac{du}{dx}}, \qquad b = \frac{d\frac{du}{dY}}{d\frac{du}{dx}}, \qquad c = \frac{d\frac{du}{dZ}}{d\frac{du}{dx}}, \qquad a' = \ldots.$$

Il vient, par suite, vu (60), et, finalement, en considérant Φ comme fonction des nouvelles variables $\frac{du}{d(x, y, z)}$ par l'intermé-

Digitized by Google

diaire des anciennes $\frac{du}{d(X, Y, Z)}$,

$$(61)\quad \left\{\begin{array}{l} F_x = \frac{d\Phi}{d\frac{du}{dX}}\,\frac{d\frac{du}{dX}}{d\frac{du}{dx}} + \frac{d\Phi}{d\frac{du}{dY}}\,\frac{d\frac{du}{dY}}{d\frac{du}{dx}} + \frac{d\Phi}{d\frac{du}{dZ}}\,\frac{d\frac{du}{dZ}}{d\frac{du}{dx}} = \frac{d\Phi}{d\frac{du}{dx}}, \\ \qquad F_y = \ldots, \qquad F_z = \ldots. \end{array}\right.$$

Donc, une seule et même *fonction* Φ *de point,* c'est-à-dire une fonction à valeurs indépendantes des coordonnées choisies, et parfaitement déterminée (à une constante près), en chaque *point* (x, y, z) de l'espace, par la manière dont varie tout autour la température u, jouit bien, dès qu'elle existe dans un système d'axes rectangles, de la propriété de fournir, dans tous, les trois flux principaux F_x, F_y, F_z, par ses dérivées partielles relatives aux variables correspondantes respectives $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$.

Il résulte immédiatement de là que, lorsque la forme (47) (p. 126) des flux calorifiques, qui donne lieu à un potentiel Φ, se présente dans un système de coordonnées rectangles, elle se reproduit dans tous les autres. Ainsi, comme nous l'avions annoncé précédemment (p. 126), *la triple égalité des conductibilités indirectes,* $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$, *est vérifiée, pour une particule donnée, dans tous les systèmes d'axes rectangulaires, dès qu'elle l'est dans un.*

Par conséquent, encore, il suffit (p. 131) que cette triple égalité existe relativement à un système d'axes rectangulaires, pour que le milieu soit symétrique ou admette trois conductibilités principales K', K'', K'''.

Observons enfin que les trois équations (59), reliant linéairement F_x, F_y, F_z aux trois variables $\frac{du}{d(x, y, z)}$, pourraient être résolues par rapport à celles-ci, qui deviendraient alors elles-mêmes des fonctions linéaires et homogènes de F_x, F_y, F_z. Par suite, le potentiel Φ, exprimé au moyen de F_x, F_y, F_z, serait encore un polynome homogène du second degré, essentiellement positif. En y regardant les nouvelles variables F_x, F_y, F_z comme fonctions des anciennes $\frac{du}{d(x, y, z)}$, et différentiant Φ par rapport à ces anciennes variables, qui donnent comme dérivées correspondantes

Digitized by Google

F_x, F_y, F_z, on aurait évidemment les trois équations

$$(62)\qquad F_x = \frac{d\Phi}{dF_x}\frac{dF_x}{d\frac{du}{dx}} + \frac{d\Phi}{dF_y}\frac{dF_y}{d\frac{du}{dx}} + \frac{d\Phi}{dF_z}\frac{dF_z}{d\frac{du}{dx}},\quad F_y = \ldots,\quad F_z = \ldots.$$

Or, si, dans ces trois équations (62) en $\frac{d\Phi}{dF_x}$, $\frac{d\Phi}{dF_y}$, $\frac{d\Phi}{dF_z}$, l'on substitue, aux *inconnues* ainsi choisies $\frac{d\Phi}{d(F_x, F_y, F_z)}$, les anciennes variables $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, et si l'on observe d'ailleurs que l'intégrabilité de l'expression (58) permet de remplacer $\frac{d(F_y, F_z)}{d\frac{du}{dx}}$ par $\frac{dF_x}{d\left(\frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}\right)}$, ..., ces trois équations (62) deviennent, en F_x, ou F_y, ou F_z séparément, les trois relations

$$F_x = \frac{dF_x}{d\frac{du}{dx}}\frac{du}{dx} + \frac{dF_x}{d\frac{du}{dy}}\frac{du}{dy} + \frac{dF_x}{d\frac{du}{dz}}\frac{du}{dz},\qquad F_y = \ldots,\qquad F_z = \ldots.$$

Mais celles-ci sont des identités en vertu du théorème d'Euler, F_x, F_y, F_z étant des fonctions homogènes et du premier degré de $\frac{du}{d(x, y, z)}$. Donc, les trois équations (62) donnent effectivement

$$(63)\qquad \frac{du}{dx} = \frac{d\Phi}{dF_x},\qquad \frac{du}{dy} = \frac{d\Phi}{dF_y},\qquad \frac{du}{dz} = \frac{d\Phi}{dF_z}.$$

En d'autres termes, *le potentiel* Φ *a pour dérivées partielles premières soit les trois flux de chaleur* F_x, F_y, F_z, *soit les trois rapidités de variation* $\frac{du}{d(x, y, z)}$ *de la température le long des normales* dx, dy, dz *aux éléments plans correspondants, suivant qu'on l'exprime au moyen de ces trois dérivées de la température ou au moyen des trois flux.*

Le problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles de la température mettra plus loin en évidence le rôle capital du potentiel Φ, et de cette circonstance, qu'il a ses valeurs *essentiellement positives*. Le cas où il existe, qui est, comme on voit, celui des corps à contexture symétrique, méritait donc d'être étudié spécialement.

Digitized by Google

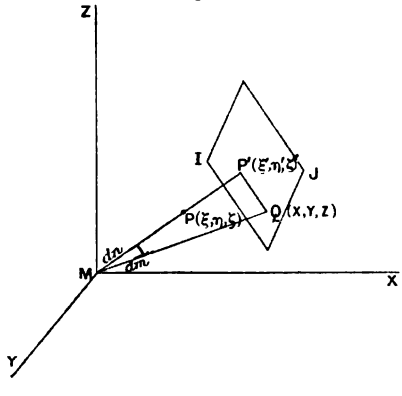
68. **Ellipsoïde principal.** — Nous aborderons aussi par ce cas, relativement simple, d'un milieu symétrique, la question qu'il nous reste à traiter au sujet de la conductibilité des particules matérielles *hétérotropes* (c'est-à-dire non isotropes), savoir, la construction des courants de chaleur F_m et des coefficients correspondants $\mathfrak{K}$ de conductibilité (p. 128), pour toutes les orientations que peut offrir successivement l'élément plan isotherme au point M considéré.

Quelle que soit la contexture, symétrique ou non, la représentation de la conductibilité K *suivant la ligne de pente* des températures nous a déjà conduit à l'ellipsoïde (56) (p. 129), qui a pour rayon ι, dans chaque direction, l'inverse de la racine carrée de la conductibilité K correspondant à cette direction prise pour celle de la ligne de pente (montante) des températures. Tout en continuant à appeler ξ, η, ζ ses coordonnées courantes, adoptons les axes MX, MY, MZ de la particule par rapport auxquels les trois conductibilités directes s'écrivent a^2, b^2, c^2 (p. 130), tandis que les conductibilités indirectes y sont deux à deux égales et contraires. L'ellipsoïde (56) devient donc

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = 1. \tag{64}$$

A côté de l'avantage qu'offrent ses rayons vecteurs, comme MP (*fig.* 12), de donner immédiatement, dans chaque cas, la direction

Fig. 12.



de la ligne de pente (montante) des températures, cet ellipsoïde a l'inconvénient de représenter par les plus grands de ces rayons

Digitized by Google

vecteurs les conductibilités K les plus petites, et *vice versa*. Or, on évitera cet inconvénient en remplaçant l'ellipsoïde (64), lieu des points P, par son *inverse*

$$(65)\qquad \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1,$$

où X, Y, Z désigneront les coordonnées du point Q, correspondant à $P(\xi, \eta, \zeta)$. On sait, en effet, et l'on reconnaît, du reste, immédiatement que ces deux ellipsoïdes se correspondent *point par point,* les points correspondants P, Q étant associés par les relations suivantes entre leurs coordonnées,

$$(66)\qquad a\xi=\frac{X}{a},\qquad b\eta=\frac{Y}{b},\qquad c\zeta=\frac{Z}{c}.$$

Le second, (X, Y, Z), décrit bien, évidemment, l'ellipsoïde (65), quand le premier, (ξ, η, ζ), se meut sur l'ellipsoïde (64); et, de plus, le rayon vecteur MP, à projections ξ, η, ζ sur les axes, est toujours normal au plan IJ tangent à l'extrémité (X, Y, Z) de MQ, où les cosinus directeurs de la normale à l'ellipsoïde (65) sont entre eux comme les demi-dérivées partielles $\frac{X}{a^2}$, $\frac{Y}{b^2}$, $\frac{Z}{c^2}$ du premier membre, équivalentes à ξ, η, ζ d'après (66).

L'élément plan isotherme donné, normal à MP, sera donc, non pas perpendiculaire, mais *conjugué* au nouveau rayon vecteur MQ, ou, autrement dit, parallèle au plan tangent IJ mené en Q à l'ellipsoïde (65). Et si alors on prolonge le rayon MP jusqu'à sa rencontre, en $P'(\xi', \eta', \zeta')$, avec ce plan tangent, on aura

$$(67)\qquad \frac{\xi'}{\xi}=\frac{\eta'}{\eta}=\frac{\zeta'}{\zeta}=\frac{MP'}{MP}.$$

Or l'équation du plan tangent IJ est, en y appelant ξ', η', ζ' les coordonnées courantes,

$$\xi(\xi'-X)+\eta(\eta'-Y)+\zeta(\zeta'-Z)=0,$$

ou bien, vu finalement (66) et (64),

$$(68)\qquad \xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta'=\xi X+\eta Y+\zeta Z=a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2=1.$$

On forme donc, en ajoutant terme à terme les trois premiers rapports (67), respectivement multipliés *haut et bas* par ξ, η, ζ,

Digitized by Google

un nouveau rapport égal, savoir, en vertu de (68), $\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ ou $\frac{1}{\overline{MP}^2}$. Et la comparaison de ce nouveau rapport au quatrième (67) conduit à la relation (d'ailleurs bien connue)

$$(69) \qquad MP' = \frac{1}{MP}.$$

Donc la conductibilité K, inverse de $\overline{MP}^2$, est exprimée par $\overline{MP'}^2$. Et *l'ellipsoïde* (65) *n'est pas moins propre que l'ellipsoïde* (64) *à la représentation de cette conductibilité* K *suivant la ligne de pente des températures;* puisque, grâce à la formule obtenue

$$(70) \qquad K = \overline{MP'}^2,$$

il donne cette conductibilité et le sens de la ligne de pente (montante) par la perpendiculaire MP', issue du centre M, sur le plan IJ, tangent à cet ellipsoïde et parallèle, du côté des températures croissantes, à l'élément isotherme donné en M.

On voit que K varie dans le même sens que MP', alors qu'il variait en sens inverse de MP. C'est donc, en réalité, l'ellipsoïde (65) qui est *direct* dans la question; et l'ellipsoïde (64) était *inverse,* quoiqu'il se fût offert le premier.

Mais l'ellipsoïde (65) comporte encore d'autres emplois, des plus importants, comme on verra, et pour lesquels son inverse (64) ne paraît être d'aucune utilité. Aussi lui conserverons-nous le nom d'*ellipsoïde principal,* que lui a donné Lamé pour une raison dont il sera question plus loin.

69. Construction des courants de chaleur, dans le cas d'une contexture symétrique. — Un de ces autres emplois de l'ellipsoïde principal (65) se montre immédiatement, quand la contexture est symétrique, ou que les trois flux principaux ont les expressions simples

$$(71) \qquad F_X = a^2\frac{du}{dX}, \qquad F_Y = b^2\frac{du}{dY}, \qquad F_Z = c^2\frac{du}{dZ}.$$

Le rayon vecteur MQ, n'y étant pas dirigé, comme l'était MP' dans l'ellipsoïde *inverse* (64), suivant la ligne de pente des tem-

Digitized by Google

pératures, reste disponible pour représenter une autre direction, *qui est précisément celle du courant*. En effet, les formules (66) donnent

$$(72) \qquad X = a^2\xi, \qquad Y = b^2\eta, \qquad Z = c^2\zeta;$$

et, comme ξ, η, ζ, projections de MP′, ont les rapports mutuels, et aussi les signes (p. 128 et 129), des trois dérivées partielles $\frac{du}{d(X, Y, Z)}$ en M, il vient, par la comparaison de (71) et de (72),

$$(73) \qquad \frac{F_X}{X} = \frac{F_Y}{Y} = \frac{F_Z}{Z} = \frac{F_m}{MQ} = \frac{\frac{du}{dX}}{\frac{X}{a^2}} = \frac{\frac{du}{dY}}{\frac{Y}{b^2}} = \frac{\frac{du}{dZ}}{\frac{Z}{c^2}}.$$

Formons, avec les trois derniers de ces rapports, un nouveau rapport égal, en les ajoutant terme à terme après les avoir multipliés *haut et bas* par les trois cosinus directeurs $\frac{(X, Y, Z)}{MQ}$ de l'élément rectiligne dm remontant le courant à partir de M. L'antécédent de ce nouveau rapport sera évidemment la dérivée $\frac{du}{dm}$, et le conséquent, $\frac{1}{MQ}\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2}\right)$, c'est-à-dire $\frac{1}{MQ}$, d'après (65). Égalons-le au quatrième des rapports (73), et il viendra, pour l'expression du courant F_m,

$$(74) \qquad F_m = \overline{MQ}^2 \frac{du}{dm}.$$

Donc, $\overline{MQ}^2$ est précisément, dans cette relation, le coefficient de conductibilité cherché $\mathfrak{K}$ du courant; et l'on a la formule très simple, analogue à (70),

$$(75) \qquad \mathfrak{K} = \overline{MQ}^2.$$

Ainsi, *dans une particule de contexture symétrique où l'on donne la direction des éléments plans isothermes, le courant de chaleur passant par un point* M *est dirigé à l'opposé du demi-diamètre,* MQ, *de l'ellipsoïde principal décrit autour de* M, *qui aboutit au point de contact de cet ellipsoïde avec son plan tangent mené parallèlement aux éléments isothermes, du côté où la température croît; de plus, la conductibilité* $\mathfrak{K}$

Digitized by Google

de la particule pour ce courant est exprimée par le carré du même diamètre MQ.

Le rapprochement des formules (70) et (75) conduit, pour le rapport des deux conductibilités K, $\mathfrak{K}$ suivant la pente des températures et suivant le courant, aux expressions

$$(76) \qquad \frac{K}{\mathfrak{K}} = \left(\frac{MP'}{MQ}\right)^2 = \cos^2 PMQ.$$

C'est ce qu'on aurait pu déduire de la formule (30) (p. 111), qui donne

$$(77) \qquad F_n = F_m \cos PMQ = \mathfrak{K}\frac{du}{dm}\cos PMQ,$$

et de ce que, le plan IJ étant parallèle aux éléments isothermes (p. 137), deux éléments rectilignes dn, dm, respectivement émanés de M suivant les directions MP, MQ, avec des longueurs telles que u y croisse d'une même différentielle du, sont entre eux comme MP′ et MQ, c'est-à-dire dans le rapport cos PMQ. On a donc

$$\frac{du}{dm} = \frac{du}{dn}\frac{dn}{dm} = \frac{du}{dn}\cos PMQ;$$

et la formule (77) devient

$$(78) \qquad F_n = (\mathfrak{K}\cos^2 PMQ)\frac{du}{dn}.$$

Donc, le rapport de F_n à $\frac{du}{dn}$, conductibilité K suivant la ligne de pente dn des températures, a bien la valeur $\mathfrak{K}\cos^2 PMQ$.

70. **Passage au cas d'une contexture non symétrique.** — Quand la contexture n'est plus symétrique, ou que les formules monomes (71) de F_X, F_Y, F_Z, se compliquant de termes en $\pm\mathfrak{D}$, $\pm\mathfrak{E}$, $\pm\mathfrak{F}$, sont remplacées par les formules trinomes (57) (p. 130), la construction précédente et, par suite, l'ellipsoïde principal ne suffisent plus. Mais comme cet ellipsoïde continue à représenter la conductibilité suivant la pente des températures, il y a lieu de considérer encore son point Q, dont les coordonnées X, Y, Z rendent toujours égaux entre eux, et *positifs* (p. 139), les trois derniers rapports (73). Alors ces rapports, ajoutés terme à terme après avoir été multipliés *haut et bas* par les facteurs propres à

Digitized by Google

introduire comme antécédents les expressions (57) de F_X, F_Y, F_Z, donnent les nouveaux rapports, ainsi égaux aux trois derniers (73),

$$(79)\qquad \frac{F_X}{X_1} = \frac{F_Y}{Y_1} = \frac{F_Z}{Z_1} = \frac{F_m}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}},$$

où X_1, Y_1, Z_1 désignent les expressions

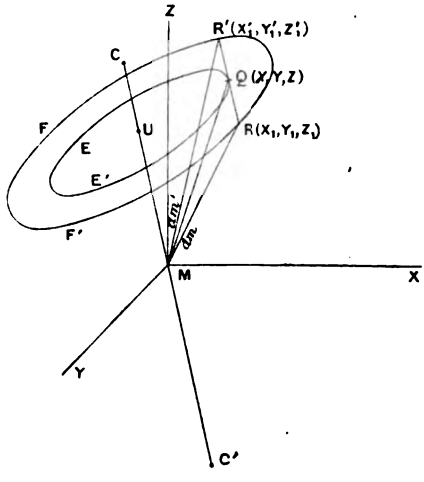
$$(80)\qquad X_1 = X - \mathfrak{F}\frac{Y}{b^2} + \mathfrak{E}\frac{Z}{c^2},\qquad Y_1 = Y - \mathfrak{D}\frac{Z}{c^2} + \mathfrak{F}\frac{X}{a^2},\qquad Z_1 = Z - \mathfrak{E}\frac{X}{a^2} + \mathfrak{D}\frac{Y}{b^2}.$$

Nous pouvons encore construire un point R (*fig.* 13) qui ait ces coordonnées X_1, Y_1, Z_1, point qui se trouvera ainsi associé à Q(X, Y, Z) par les relations (80). Alors le quatrième rapport (79) deviendra

$$(81)\qquad \frac{F_m}{MR}.$$

Et nous en formerons un autre égal, ayant pour numérateur la

Fig. 13.



dérivée $\frac{du}{dm}$ de la température le long du premier élément dm de MR, en multipliant respectivement *haut et bas* les trois derniers rapports (73) par les trois cosinus directeurs $\frac{(X_1, Y_1, Z_1)}{MR}$

de dm, puis ajoutant terme à terme. Ce nouveau rapport sera

$$(82)\qquad \frac{\dfrac{du}{dm}}{\dfrac{1}{\overline{MR}}\left(\dfrac{XX_1}{a^2}+\dfrac{YY_1}{b^2}+\dfrac{ZZ_1}{c^2}\right)}.$$

Or, les relations (80), multipliées respectivement par $\frac{X}{a^2}$, $\frac{Y}{b^2}$, $\frac{Z}{c^2}$ et ajoutées, donnent, en vertu de (65),

$$(83)\qquad \frac{XX_1}{a^2}+\frac{YY_1}{b^2}+\frac{ZZ_1}{c^2}=1.$$

Il résulte, par suite, de l'égalité des deux expressions (81) et (82),

$$(84)\qquad F_m=\overline{MR}^2\,\frac{du}{dm}.$$

En d'autres termes, $\overline{MR}^2$ est le coefficient $\mathfrak{K}$ de conductibilité suivant le courant, et l'on a

$$(85)\qquad \mathfrak{K}=\overline{MR}^2.$$

La construction du point R suffira donc pour que l'on connaisse, tout à la fois, et la direction RM du courant de chaleur, et la conductibilité correspondante $\mathfrak{K}$ de la matière.

L'équation (83), qui est justement celle du plan tangent en Q à l'ellipsoïde principal (65), nous apprend déjà que ce point R appartient au plan tangent. Or, on trouve aisément un second plan, mais de direction constante, qui contient encore les deux points Q, R. A cet effet, ajoutons les relations (80), multipliées respectivement par $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$. Nous aurons

$$(86)\qquad \mathfrak{D}X_1+\mathfrak{E}Y_1+\mathfrak{F}Z_1=\mathfrak{D}X+\mathfrak{E}Y+\mathfrak{F}Z;$$

et c'est bien l'équation du plan mené, par (X, Y, Z), normalement à la direction dont les angles avec les axes ont leurs cosinus proportionnels aux trois conductibilités indirectes $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$. Mais, plutôt que de considérer une normale à ces plans, nous tirerons, dans l'ellipsoïde principal, le demi-diamètre MC (p. 141) ayant les cosinus directeurs

$$(87)\qquad \frac{(\mathfrak{D}a^2,\ \mathfrak{E}b^2,\ \mathfrak{F}c^2)}{\sqrt{\mathfrak{D}^2a^4+\mathfrak{E}^2b^4+\mathfrak{F}^2c^4}},$$

Digitized by Google

de mêmes signes, respectivement, que $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$. Les plans (86) leur sont conjugués dans l'ellipsoïde principal (65); car, si, à l'extrémité C de ce demi-diamètre, ou à l'extrémité C′ de son prolongement dans l'ellipsoïde en deçà du centre M, on mène un plan tangent, les cosinus directeurs de sa normale seront entre eux comme $\frac{X}{a^2}$, $\frac{Y}{b^2}$, $\frac{Z}{c^2}$, c'est-à-dire comme $\frac{\mathfrak{D}a^2}{a^2} = \mathfrak{D}$, $\frac{\mathfrak{E}b^2}{b^2} = \mathfrak{E}$, $\frac{\mathfrak{F}c^2}{c^2} = \mathfrak{F}$.

Donc le point R est situé sur la tangente QR à l'ellipse, EE′, d'intersection de l'ellipsoïde principal par le plan EUQ, conjugué au diamètre fixe C′MC, d'une direction dépendant des rapports mutuels qui existent entre les trois conductibilités indirectes $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$.

71. Ellipsoïde des conductibilités. — On voit que ce point R est toujours extérieur à l'ellipsoïde principal. Pour achever de fixer sa position le long de la tangente QR, essayons de le placer sur un ellipsoïde homothétique et concentrique à l'ellipsoïde principal : ce qui sera toujours possible en évaluant par les formules (80), en fonction de X, Y, Z, le premier membre

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{Y_1^2}{b^2} + \frac{Z_1^2}{c^2} \tag{88}$$

de l'équation d'un tel ellipsoïde. Or, les formules (80), élevées au carré, donnent

$$\frac{X_1^2}{a^2} = \frac{X^2}{a^2} - 2\frac{X}{a^2}\left(\mathfrak{F}\frac{Y}{b^2} - \mathfrak{E}\frac{Z}{c^2}\right) + \frac{1}{a^2}\left(\mathfrak{F}\frac{Y}{b^2} - \mathfrak{E}\frac{Z}{c^2}\right)^2, \qquad \frac{Y_1^2}{b^2} = \ldots;$$

et l'expression (88) a, vu (65), la valeur

$$1 + \frac{1}{a^2b^2c^2}\left[\left(\mathfrak{F}c\frac{Y}{b} - \mathfrak{E}b\frac{Z}{c}\right)^2 + \left(\mathfrak{D}a\frac{Z}{c} - \mathfrak{F}c\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\mathfrak{E}b\frac{X}{a} - \mathfrak{D}a\frac{Y}{b}\right)^2\right],$$

qu'une identité bien connue transforme immédiatement en celle-ci,

$$1 + \frac{1}{a^2b^2c^2}\left[(\mathfrak{D}^2a^2 + \mathfrak{E}^2b^2 + \mathfrak{F}^2c^2)\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2}\right) - \left(\mathfrak{D}a\frac{X}{a} + \mathfrak{E}b\frac{Y}{b} + \mathfrak{F}c\frac{Z}{c}\right)^2\right],$$

égale, vu encore (65), à

$$1 + \frac{(\mathfrak{D}^2a^2 + \mathfrak{E}^2b^2 + \mathfrak{F}^2c^2) - (\mathfrak{D}X + \mathfrak{E}Y + \mathfrak{F}Z)^2}{a^2b^2c^2}.$$

Digitized by Google

Donc l'équation de l'ellipsoïde cherché, homothétique à l'ellipsoïde principal et passant par le point R, est

$$(89)\quad \frac{X_1^2}{a^2}+\frac{Y_1^2}{b^2}+\frac{Z_1^2}{c^2}=1+\frac{(\mathfrak{D}^2a^2+\mathfrak{E}^2b^2+\mathfrak{F}^2c^2)-(\mathfrak{D}X+\mathfrak{E}Y+\mathfrak{F}Z)^2}{a^2b^2c^2}.$$

Son second membre varie avec le trinome $\mathfrak{D}X+\mathfrak{E}Y+\mathfrak{F}Z$, c'est-à-dire avec le plan EUE′ ou avec l'ellipse EE′ contenant le point Q; mais il reste invariable, et, par conséquent, l'ellipsoïde lieu des points (X_1, Y_1, Z_1) est unique, tant que le point Q reste sur l'ellipse EE′. Donc, alors, les deux points Q, R décrivent respectivement, dans leur plan UEE′, les deux ellipses concentriques et homothétiques EE′, FF′, suivant lesquelles ce plan coupe les deux ellipsoïdes semblables (65) et (89), à coordonnées courantes X, Y, Z et X_1, Y_1, Z_1.

Par conséquent, à tous les points Q situés sur une même ellipse EE′ correspondent des points R situés aussi sur une même ellipse FF′, concentrique, semblable et semblablement placée. L'ellipsoïde (89) qui contient celle-ci est, visiblement, d'autant plus petit que le trinome $\mathfrak{D}X+\mathfrak{E}Y+\mathfrak{F}Z$ est plus différent de zéro, ou le plan EUE′ plus éloigné du centre M. Il sera donc le plus réduit possible pour les deux positions tangentes du plan, ou lorsque l'ellipse mobile EE′ se confondra avec son centre U, devenu C ou C′. Or, alors X, Y, Z, coordonnées du point Q, devenues proportionnelles, d'après (87), à $\mathfrak{D}a^2$, $\mathfrak{E}b^2$, $\mathfrak{F}c^2$, et vérifiant d'ailleurs l'équation (65) de l'ellipsoïde principal, ont les valeurs $\pm\frac{(\mathfrak{D}a^2,\ \mathfrak{E}b^2,\ \mathfrak{F}c^2)}{\sqrt{\mathfrak{D}^2a^2+\mathfrak{E}^2b^2+\mathfrak{F}^2c^2}}$; ce qui rend l'expression $(\mathfrak{D}X+\mathfrak{E}Y+\mathfrak{F}Z)^2$ égale à $\mathfrak{D}^2a^2+\mathfrak{E}^2b^2+\mathfrak{F}^2c^2$ et fait coïncider l'ellipsoïde (89) avec l'ellipsoïde principal (65). Ainsi, l'ellipse FF′ se réduit à son centre en même temps que l'ellipse EE′.

Cela posé, le lieu des ellipses FF′ s'obtient immédiatement, en observant que, d'après (86), le trinome $\mathfrak{D}X+\mathfrak{E}Y+\mathfrak{F}Z$ peut être remplacé, dans (89), par $\mathfrak{D}X_1+\mathfrak{E}Y_1+\mathfrak{F}Z_1$. Et l'équation (89) devient celle de l'ellipsoïde

$$(90)\quad \frac{X_1^2}{a^2}+\frac{Y_1^2}{b^2}+\frac{Z_1^2}{c^2}+\frac{(\mathfrak{D}X_1+\mathfrak{E}Y_1+\mathfrak{F}Z_1)^2}{a^2b^2c^2}=1+\frac{\mathfrak{D}^2a^2+\mathfrak{E}^2b^2+\mathfrak{F}^2c^2}{a^2b^2c^2}.$$

Celui-ci étant ainsi le lieu des extrémités (X_1, Y_1, Z_1) des rayons

Digitized by Google

vecteurs MR, *propres à représenter par leurs carrés les conductibilités* $\mathfrak{K}$ *du milieu pour les courants de chaleur qui ont leur direction,* il convient de l'appeler l'*ellipsoïde des conductibilités.*

Aux deux extrémités du diamètre CC′, il admet les plans tangents de l'ellipsoïde principal, puisque ses ellipses d'intersection par ces plans se réduisent aux points de contact C ou C′. Il y est donc tangent à l'ellipsoïde principal, qu'il entoure d'ailleurs de toutes parts; et l'on voit que les deux ellipsoïdes sont coupés par les plans conjugués à leur diamètre commun CC′ suivant des ellipses homothétiques.

Si on les rapportait tous les deux à ce diamètre commun pris pour axe des z et aux axes (principaux) des deux ellipses diamétrales conjuguées pour axes des x et des y, on reconnaîtrait aisément que les aires de leurs ellipses d'intersection EE′, FF′ par tout plan EUE′ conjugué au diamètre commun CC′ sont les produits respectifs des aires des sections diamétrales correspondantes par le facteur commun $1 - \left(\frac{MU}{MC}\right)^2$. Donc *la non-symétrie du milieu, en faisant remplacer les ellipses* EE′, *sur leurs propres plans, par les ellipses plus grandes* FF′, *les dilate toutes dans un même rapport;* et c'est évidemment cette circonstance qui les amène sur un même ellipsoïde (90).

72. Construction générale des courants de chaleur. — Il ne reste plus, pour achever de déterminer le point (X_1, Y_1, Z_1), qu'à savoir laquelle choisir des deux intersections R, R′ de l'ellipse extérieure FF′ par la tangente QR à l'ellipse intérieure EE′.

Les formules (80) montrent que le point cherché $R(X_1, Y_1, Z_1)$ se déplace avec continuité dans l'espace, soit quand le point $Q(X, Y, Z)$ se déplace lui-même graduellement sur l'ellipsoïde principal, soit aussi lorsque, Q restant fixe, sur l'ellipsoïde principal fixe également, les trois conductibilités latérales $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ varient avec continuité, ou que, l'ellipsoïde des conductibilités se déformant peu à peu, le diamètre de contact C′C des deux ellipsoïdes prend successivement toutes les orientations. Or, pourvu que l'on évite de faire annuler à la fois $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ et d'amener le point R en C ou en C′, la corde QRR′ garde une certaine gran-

Digitized by Google

deur durant toutes ces transformations; et il est impossible qu'à aucun moment les deux points R, R′ échangent leurs positions. Si donc, par exemple, pour un observateur ayant les pieds en M, la tête du côté de MC, et tourné vers le point Q, le point (X_1, Y_1, Z_1) est ou bien à droite, ou bien à gauche dans un état de la figure, il le sera aussi dans tous les autres états.

Admettons, pour fixer les idées, que l'on ait pris la disposition relative ordinaire des parties positives des axes, *les* Y *positifs étant à la droite et les* X *positifs à la gauche* d'un observateur qui a les pieds à l'origine, la tête sur l'axe des Z positifs et le visage tourné vers l'angle des XY positifs. Cela posé, imaginons le cas simple où, d'une part, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ s'annulant et $\mathfrak{F}$ étant positif, le demi-diamètre MC coïncide avec MZ, tandis que, d'autre part, Y étant nul et $X > 0$, le point Q est situé dans le plan des XZ, du côté des X positifs. Alors les deux premières formules (80) donnent $X_1 = X$, $Y_1 = \mathfrak{F}\frac{X}{a^2} > 0$; et le point (X_1, Y_1, Z_1), dans l'angle dièdre des XY positifs, se trouve à droite de l'observateur tourné vers le point Q, dont il vient d'être parlé.

Nous pouvons donc conclure comme il suit toute cette recherche :

Étant donnée, dans une particule, la disposition des éléments plans isothermes, le courant de chaleur qui passe par son point quelconque M *s'obtient :* 1° *en construisant, autour du centre* M, *les deux ellipsoïdes principal et des conductibilités, avec leur diamètre commun* C′C, *dont on choisit la moitié* MC *à cosinus directeurs de mêmes signes respectifs que les trois conductibilités latérales* $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$; 2° *en déterminant le point de contact* Q *du plan tangent mené, à l'ellipsoïde principal, parallèlement au plan isotherme donné en* M, *et du côté où la température est plus forte qu'en* M; 3° *en coupant ensuite les deux ellipsoïdes par un plan issu du point de contact* Q *et conjugué, dans les deux ellipsoïdes, à leur diamètre commun* C′C; 4° *enfin, en tirant par le point* Q, *à l'ellipse intérieure d'intersection, une tangente* QR, *de gauche à droite par rapport à un observateur qui aurait les pieds au centre* M, *la tête vers le point* C, *et, devant lui, le point* Q. *Le point* R *où cette tangente coupera l'ellipse extérieure d'inter-*

Digitized by Google

section sera le point cherché, qu'il suffit de joindre au centre M *pour avoir tout à la fois la direction* RM *du courant de chaleur et la conductibilité* $\mathcal{K} = \overline{\mathrm{MR}}^2$ *de la particule pour ce courant.*

73. **Construction, inverse, des éléments isothermes.** — *La même construction, effectuée dans l'ordre inverse, fera connaître l'élément plan isotherme en* M, *si l'on donne la direction du courant de chaleur et, par conséquent, le point* R. En effet, la tangente RQ, tirée de ce point R, en allant *vers la gauche* de l'observateur dont il vient d'être parlé (qui regarderait R), à l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde principal par le plan mené, en R, conjugué au diamètre commun C'C, fera connaître son point de contact Q. Et il ne restera plus qu'à tirer le demi-diamètre MQ, auquel seront conjugués, dans l'ellipsoïde principal, les éléments plans isothermes passant par le point donné M ou auprès, éléments à température croissante quand on les traversera en allant de M vers R.

74. **Milieux non symétriques inverses l'un de l'autre, à ellipsoïdes communs.** — On remarquera que la règle ainsi démontrée pour construire les courants de chaleur donnerait (p. 141) le point R', au lieu du point R, si l'observateur dont il est question, tourné vers la corde RQR', avait la tête du côté de C' et non du côté de C. Or le simple remplacement de MC par MC' aurait précisément lieu si $\mathfrak{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, gardant les mêmes valeurs absolues, prenaient signes contraires; car alors rien ne serait changé aux équations des deux ellipsoïdes (65) et (90). Seuls, les deux points C et C' échangeraient leurs rôles.

Ainsi, la *dualité* des points R, R' tient à l'existence de deux constitutions non symétriques également possibles, *inverses* l'une de l'autre, pour ainsi dire, et ayant leurs ellipsoïdes, tant principal que des conductibilités, absolument communs.

Mais nous verrons, dans la prochaine leçon, que, même avec une seule de ces deux constitutions, la première, par exemple, un rôle important, capital dans l'étude des plaques minces, est réservé au point R'. Ce rôle nous fera connaître un nouvel emploi essentiel du système des deux ellipsoïdes.

Digitized by Google

DIXIÈME LEÇON.

AUTRES CONSTRUCTIONS RELATIVES A LA CONDUCTIBILITÉ, ET APPLICATIONS AUX BARRES, AUX PLAQUES, AUX CORPS CRISTALLISÉS.

75. Autre emploi du système des deux ellipsoïdes principal et des conductibilités. — Considérons encore la seconde figure de la dernière leçon (p. 141); mais, au lieu de supposer isotherme l'élément plan donné, en M, auquel est parallèle le plan tangent en Q à l'ellipsoïde principal, imaginons que ce soit un élément plan quelconque traversé par un flux F que l'on se propose d'étudier, ce flux étant celui qui provient du côté où l'on a mené le plan tangent et le demi-diamètre conjugué MQ.

Les trois cosinus directeurs de la normale à l'élément plan donné sont donc ceux de la normale même à l'ellipsoïde principal en Q, tirée vers le dehors; et ils ont les rapports mutuels, ainsi que les signes respectifs, des trois expressions $\frac{X}{a^2}$, $\frac{Y}{b^2}$, $\frac{Z}{c^2}$. Ils sont donc les quotients de ces expressions par le radical $\sqrt{\frac{X^2}{a^4}+\frac{Y^2}{b^4}+\frac{Z^2}{c^4}}$, égal, d'après les formules (66) (p. 137), à $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, ou à MP, inverse, vu (69) (p. 138), de la perpendiculaire MP′ allant du centre M sur le plan tangent, en Q, à l'ellipsoïde principal.

Appelons P cette perpendiculaire, et les trois cosinus directeurs de la normale à l'élément plan proposé, traversé par le flux F, seront

$$\frac{PX}{a^2},\quad \frac{PY}{b^2},\quad \frac{PZ}{c^2}. \tag{91}$$

Digitized by Google

Par suite, l'expression du flux est, en vertu de (27) (p. 110),

$$F = P\left(\frac{XF_X}{a^2} + \frac{YF_Y}{b^2} + \frac{ZF_Z}{c^2}\right). \tag{92}$$

Substituons-y les valeurs (57) (p. 130) des trois flux principaux et posons, pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned} X'_1 &= X + \mathcal{F}\frac{Y}{b^2} - \mathcal{E}\frac{Z}{c^2}, \\ Y'_1 &= Y + \mathcal{D}\frac{Z}{c^2} - \mathcal{F}\frac{X}{a^2}, \\ Z'_1 &= Z + \mathcal{E}\frac{X}{a^2} - \mathcal{D}\frac{Y}{b^2}. \end{aligned}\right. \tag{93}$$

Il viendra

$$F = P\left(X'_1\frac{du}{dX} + Y'_1\frac{du}{dY} + Z'_1\frac{du}{dZ}\right). \tag{94}$$

Or X'_1, Y'_1, Z'_1 sont précisément, d'après les formules (80) et (93) comparées, les coordonnées du point R′, c'est-à-dire ce que seraient les coordonnées du point R si $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ changeaient de signes. Et il suffit de diviser par MR′ le trinome du second membre de (94) pour que ce trinome devienne la somme des produits des trois dérivées partielles de u en M par les cosinus directeurs correspondants de MR′, c'est-à-dire la dérivée même de la température le long du premier élément dm' du demi-diamètre MR′ de l'ellipsoïde des conductibilités.

76. Chaque flux est réglé par la chute de température suivant une direction fixe correspondante. — On a donc, en définitive, pour la formule du flux F qui traverse, en M, l'élément plan conjugué dans l'ellipsoïde principal au rayon quelconque MQ,

$$F = (P \times MR')\frac{du}{dm'}. \tag{95}$$

Ainsi, *le flux* F *passant à travers un élément plan quelconque,* mené en M dans la particule proposée, *est toujours le produit d'un coefficient de conductibilité constant,* que nous appellerons $\varkappa$, *par la dérivée de la température suivant une certaine direction* MR′, *variable avec celle de l'élément plan.*

On voit que *cette direction est juste l'opposée de celle qu'on*

Digitized by Google

aurait pour le courant de chaleur, si l'élément plan devenait isotherme et que le milieu fût précisément l'inverse du proposé, ou pourvu des mêmes ellipsoïdes, principal et des conductibilités, mais avec signes contraires des conductibilités indirectes $\mathfrak{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$.

Le coefficient de conductibilité $\varkappa$, qui donne simplement

$$F = \varkappa \frac{du}{dm'}, \tag{96}$$

a, d'après (95), la valeur

$$\varkappa = P \times MR'; \tag{97}$$

il est le produit du demi-diamètre MR′ *de l'ellipsoïde des conductibilités par la distance* P *du centre* M *au plan tangent, en* Q, *à l'ellipsoïde principal, c'est-à-dire parallèle à l'élément proposé.*

Dans une particule de contexture symétrique, les trois demi-diamètres MQ, MR, MR′ se confondent : la direction suivant laquelle la chute de température détermine le flux à travers l'élément plan devient précisément celle que suit le courant quand l'élément plan est isotherme; et, K égalant d'ailleurs P^2, tandis que $\mathfrak{K}$ devient $\overline{MR'}^2$, *le nouveau coefficient* $\varkappa$ *de conductibilité est alors moyen proportionnel entre* K *et* $\mathfrak{K}$, *c'est-à-dire entre les deux coefficients de conductibilité suivant la ligne de pente des températures et suivant le courant, pour le cas où l'élément plan proposé serait isotherme.*

77. D'un ellipsoïde des conductibilités considéré par Lamé. — Lamé, dans les quatrième et cinquième de ses *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur* (Paris, 1861), avait eu l'idée de regarder ainsi le flux F à travers chaque élément plan comme proportionnel à la dérivée de la température suivant une direction fixe; et, après avoir déterminé celle-ci, il avait regardé le flux comme cheminant suivant cette direction. C'est ce qu'il appelait un *flux oblique,* flux qu'il faisait, par conséquent, diverger dans tous les sens pour les divers éléments plans se croisant en M, faute d'avoir dégagé la notion du *courant de chaleur,* unique à travers tous les éléments plans d'une même particule. Ayant eu,

Digitized by Google

en outre, l'idée de porter, à partir du centre M, suivant la direction MR′ obtenue, une longueur proportionnelle au coefficient de conductibilité correspondant $\varkappa$, il a reconnu que les extrémités de toutes les droites ainsi construites dessinent un ellipsoïde qu'il a appelé l'*ellipsoïde des conductibilités*. On voit que cet ellipsoïde n'a rien de commun avec celui, de même nom, dont il a été question ci-dessus [1]. Son équation est très compliquée, et l'on ne lui connaît aucune application.

78. Éléments plans pour lesquels les flux de chaleur dépendent des dérivées de la température dans un plan donné. — Si λ, μ, ν désignent les trois cosinus directeurs de la normale à l'élément plan, entre eux comme $\frac{X}{a^2}$, $\frac{Y}{b^2}$, $\frac{Z}{c^2}$, il y a proportionnalité de X, Y, Z à $a^2\lambda$, $b^2\mu$, $c^2\nu$; et les expressions (93) de X'_1, Y'_1, Z'_1 donnent

$$(98)\qquad \frac{X'_1}{a^2\lambda + \mathcal{F}\mu - \mathcal{E}\nu} = \frac{Y'_1}{b^2\mu + \mathcal{D}\nu - \mathcal{F}\lambda} = \frac{Z'_1}{c^2\nu + \mathcal{E}\lambda - \mathcal{D}\mu}.$$

Or supposons que l'on doive construire en M des éléments plans tels, que *les flux correspondants dépendent de dérivées de u prises sans sortir d'un plan donné,* passant par M et défini au moyen des cosinus directeurs λ', μ', ν' de sa normale. Ce plan devra évidemment contenir le demi-diamètre MR′, à projections X'_1, Y'_1, Z'_1, et l'on aura

$$(99)\qquad \lambda' X'_1 + \mu' Y'_1 + \nu' Z'_1 = 0.$$

Donc, vu les formules (98), la condition à vérifier par les cosinus directeurs λ, μ, ν de la normale aux éléments plans cherchés sera

$$\lambda'(a^2\lambda + \mathcal{F}\mu - \mathcal{E}\nu) + \mu'(b^2\mu + \mathcal{D}\nu - \mathcal{F}\lambda) + \nu'(c^2\nu + \mathcal{E}\lambda - \mathcal{D}\mu) = 0,$$

ou bien,

$$(100)\quad (a^2\lambda' - \mathcal{F}\mu' + \mathcal{E}\nu')\lambda + (b^2\mu' - \mathcal{D}\nu' + \mathcal{F}\lambda')\mu + (c^2\nu' - \mathcal{E}\lambda' + \mathcal{D}\mu')\nu = 0.$$

---

[1] Et dont j'ai fait connaître en 1867, dans ma Thèse de Doctorat *Sur la propagation de la chaleur dans les cristaux* (Paris, Gauthier-Villars), les propriétés physiques, notamment l'identité avec l'ellipsoïde révélé par les expériences classiques du physicien de Senarmont sur la conductibilité des plaques cristallines. L'étude de ces propriétés sera le principal objet des quatre dernières leçons sur la théorie analytique de la chaleur contenues dans le Volume suivant.

Digitized by Google

Cette condition exprime que la normale aux éléments plans est perpendiculaire à une droite fixe, émanée de M, ayant ses cosinus directeurs proportionnels à

$$(101)\qquad a^2\lambda' - \mathcal{F}\mu' + \mathcal{E}\nu',\quad b^2\mu' - \mathcal{D}\nu' + \mathcal{F}\lambda',\quad c^2\nu' - \mathcal{E}\lambda' + \mathcal{D}\mu'.$$

En d'autres termes, les éléments plans cherchés sont ceux qui passent par cette droite fixe.

Imaginons maintenant que le plan donné en M, dans lequel doivent être prises les dérivées de la température, soit celui dont on a mené, suivant MQ (p. 141), le diamètre conjugué dans l'ellipsoïde principal; et appelons X, Y, Z les coordonnées du point Q. Les cosinus λ', μ', ν' seront donc proportionnels à $\frac{X}{a^2}$, $\frac{Y}{b^2}$, $\frac{Z}{c^2}$; et les trois expressions (101) pourront être remplacées par celles-ci

$$(102)\qquad X - \mathcal{F}\frac{Y}{b^2} + \mathcal{E}\frac{Z}{c^2},\quad Y - \mathcal{D}\frac{Z}{c^2} + \mathcal{F}\frac{X}{a^2},\quad Z - \mathcal{E}\frac{X}{a^2} + \mathcal{D}\frac{Y}{b^2}.$$

Ce sont précisément, d'après (80), les coordonnées X_1, Y_1, Z_1 du point R, et c'est ainsi par MR que devront passer tous les éléments plans cherchés, à travers lesquels les flux de chaleur dépendent de dérivées de u prises sans sortir du plan proposé, conjugué à MQ dans l'ellipsoïde principal.

En résumé, *les éléments plans pour lesquels les flux de chaleur dépendent des dérivées de la température, prises sans sortir d'un plan donné, sont ceux qui passent par la droite suivant laquelle serait dirigé le courant de chaleur, si le plan donné devenait isotherme.*

On aurait pu le prévoir en observant que, pour les éléments plans menés suivant cette droite, le flux s'annule dès que s'annulent en M les dérivées de u suivant deux directions différentes dans le plan donné, puisque c'est alors qu'il devient isotherme et que le courant passe par la droite. Le terme proportionnel, dans l'expression du flux en question, à la dérivée de u suivant une troisième direction (ou coordonnée) sortant du plan, a donc son coefficient nul; et le flux ne dépend bien, dans tous les cas, que des dérivées de u prises sans sortir du plan.

79. Éléments plans isothermes qui correspondent aux courants de chaleur rasant un plan donné. — Il est tout aussi

Digitized by Google

facile de trouver, dans une particule, les modes de distribution des températures, c'est-à-dire les orientations de l'élément plan isotherme passant par son point intérieur quelconque M, pour lesquels le courant de chaleur, en M, a sa direction contenue dans un plan donné. Supposons que ce soit parallèlement à ce plan donné que l'on ait mené un plan tangent, en Q, à l'ellipsoïde principal. Tous les courants en question, rasant le plan donné, y annuleront le flux F et, par suite, d'après (96), la dérivée $\frac{du}{dm'}$; ce qui signifie que dm', premier élément de MR′, sera un élément rectiligne *isotherme,* ou que l'élément plan *isotherme* en M contiendra la droite MR′.

On voit ainsi qu'il y a solidarité absolue entre le parallélisme du courant, au plan tangent en Q à l'ellipsoïde principal, et le parallélisme des éléments plans isothermes à la direction MR′.

Donc, *quand le courant de chaleur est parallèle à un plan donné, les éléments plans isothermes sont parallèles à la direction qu'aurait le courant de chaleur lui-même, si ce plan donné devenait isotherme et que la constitution du milieu fût remplacée par son inverse* (ou que $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$ changeassent de signe).

80. **Application de la théorie de la conductibilité aux barres minces.** — Supposons que le corps étudié soit une *barre,* droite ou courbe, d'une très grande longueur et d'un rayon de courbure considérable, par rapport aux dimensions de ses sections transversales. Alors un grand nombre de sections successives sensiblement parallèles, que l'on peut y mener à une distance, les unes des autres, comparable à leurs dimensions, se trouvent placées à très peu près dans les mêmes conditions physiques; et les flux qui les traversent, sensiblement pareils pour plusieurs consécutives, n'ont de l'un à l'autre qu'une différence très faible par rapport à chacun d'eux. Le *tronçon* élémentaire compris entre deux sections ne gagne par conséquent, à travers ces sections, qu'une quantité de chaleur égale à la différence dont il s'agit, ou très faible soit par rapport au flux sorti par la première, soit par rapport au flux entré par la seconde.

D'autre part, la température u ne varie, en général, d'un point

Digitized by Google

aux autres du tronçon, que de minimes fractions de sa valeur. C'est l'excédent de cette température u presque uniforme, sur celle de l'atmosphère ambiante, qui règle les échanges de chaleur du tronçon avec le dehors, soit par la surface latérale du tronçon, soit même (si la matière qui le compose est diathermane) par l'éther de tout son volume, éther d'une température alors sensiblement équilibrée avec celle de l'atmosphère environnante, à ce qui semble du moins le plus simple et le mieux admissible. Donc, la chaleur perdue à travers la surface ou communiquée à l'éther du volume est de même signe pour tout le tronçon. Et, d'ailleurs, elle n'atteint pas un ordre de grandeur plus élevé que celle qui est gagnée en tout à travers les deux sections ou bases; sans quoi les tronçons se comporteraient évidemment, à très peu près, comme tout autant de corps isolés, qui auraient la matière de leurs bases sensiblement dépourvue de conductibilité. Ainsi, en particulier, les flux qui traversent la surface latérale d'un tronçon sont tout au plus comparables à la différence des deux flux passés à travers ses bases. Enfin, cette surface latérale n'ayant pas moins d'aire que chaque base, il en résulte que *les flux par unité d'aire, à travers la surface latérale, sont comme nuls par rapport aux flux traversant les sections et rapportés aussi à l'unité d'aire.*

C'est dire que *le courant de chaleur, dans chaque tronçon, est dirigé, à très peu près, suivant l'axe de la barre;* et, si on limite les tronçons par des sections normales, l'expression du flux total qui traversera celles-ci par unité de temps sera très sensiblement le produit de la conductibilité $\mathfrak{K}$ de la matière *pour un courant dirigé suivant l'axe,* multipliée par l'aire de la section et par la dérivée de la température *suivant cet axe de la barre.* En combinant ce simple principe avec celui de graduelle variation de l'état physique d'une section à l'autre, qui fait que la petite erreur de la formule ainsi admise pour le courant total a sa variation, d'une section à l'autre, négligeable par rapport à la variation analogue du courant lui-même, on forme aisément, par des méthodes qui seront exposées plus loin [1], l'équation aux dérivées partielles

[1] Aux nos 132 et 162.

Digitized by Google

régissant les changements de la température d'instant en instant, *le long de l'axe*.

On en déduit, par exemple, du moins sous les conditions les plus simples possibles relativement aux pertes de chaleur par la surface latérale ou par diathermanéité, que des barres *cylindriques* ou *prismatiques,* taillées dans un milieu *homogène,* à partir d'un point commun M, et chauffées à la fois en ce point M de manière à y produire simultanément, dans toutes, les mêmes températures successives, auront à chaque instant leurs points *isothermes* (ou d'égale température) sur des ellipsoïdes concentriques et homothétiques par rapport à l'ellipsoïde des conductibilités, construit autour de M comme centre.

81. **Surfaces isothermes des barres.** — Observons encore que les petites surfaces isothermes, dans chaque barre, auront, vu l'orientation du courant suivant l'axe de la barre, leurs éléments plans très sensiblement confondus avec celui que nous avons appris à construire, dans la dernière leçon (p. 147), quand on donnait la direction RM du courant, ou qui est conjugué, dans l'ellipsoïde principal, au demi-diamètre MQ, déduit de MR au moyen de la tangente RQ à l'ellipse intérieure EE'. Ainsi ces petites surfaces isothermes ont tous leurs éléments sensiblement parallèles, dans une barre rectiligne de contexture homogène; et elles sont à très peu près, dans tous les cas, des plans d'une orientation entièrement indépendante, comme on voit, du mode d'échauffement employé pour la barre.

82. **Application aux plaques minces : leurs surfaces isothermes.** — Supposons maintenant que le corps étudié soit une plaque d'une épaisseur très petite par rapport à sa longueur, à sa largeur et aux rayons de courbure de son *feuillet moyen,* qui sera la surface joignant les milieux des normales menées entre les deux faces de la plaque. Alors, si l'on découpe celle-ci, par deux systèmes de sections, en fragments ayant la forme de parallélépipèdes à dimensions toutes trois comparables, avec leurs bases situées sur les deux faces respectives, les conditions géométriques et physiques varieront très peu d'une section aux sections voisines du même système, comme il arrivait pour des sections voisines

Digitized by Google

d'une barre ; et le flux sortant par une face latérale d'un fragment sera sensiblement égal au flux entrant par la face opposée. La quantité de chaleur gagnée par le fragment sur ses voisins, à travers leurs faces contiguës, sera donc encore, comme dans le cas d'une barre, très petite en comparaison des flux passés par ces faces. Or, les quantités de chaleur échangées soit avec l'atmosphère ambiante, à travers les deux bases, soit, par diathermanéité, avec l'éther du fragment et, par lui, avec l'éther de la même atmosphère, se règlent encore, comme s'il s'agissait d'un tronçon de barre, sur l'excédent de la température presque uniforme u du fragment par rapport à celle de l'atmosphère; et elles sont toutes de même signe. Donc, la conductibilité de la plaque étant d'ailleurs censée suffisante pour que les échanges entre fragments se fassent sentir, les flux sortis d'un fragment à travers les faces de la plaque se trouvent être, toujours comme dans le cas d'une barre, seulement comparables aux différences des flux entrés ou sortis par les sections, et incomparablement plus petits que ceux-ci, soit en totalité, soit par unité d'aire.

Il suit évidemment de là que les petites variations de u d'un point à l'autre, dans l'intérieur de chaque fragment, sont, à très peu près, celles qui auraient lieu si les flux à travers les bases ou, par suite, à travers le feuillet moyen qui leur est sensiblement parallèle, étaient rigoureusement nuls. Autrement dit, *les courants de chaleur dans la plaque sont, à très peu près, parallèles au feuillet moyen.*

Il en résulte que, si l'on construit les deux ellipsoïdes principal et des conductibilités autour d'un point M du feuillet moyen (*fig.* 13, p. 141), et qu'on mène à l'ellipsoïde principal un plan tangent parallèle à ce feuillet, Q étant censé son point de contact, la surface isotherme en M contiendra la droite MR′, d'orientation constante dans tout le fragment, ou même dans toute la plaque si elle est plane et formée d'une matière homogène. Ainsi, quel que soit le mode d'échauffement, les surfaces isothermes, dans une plaque plane et à contexture homogène, sont des cylindres, à génératrices parallèles chez tous, et dont la direction dépend de celle qu'avait la plaque, dans le milieu homogène d'où celle-ci a été tirée.

Digitized by Google

83. **Comment s'y expriment les flux de chaleur par les chutes de température dans le feuillet moyen.** — La direction d'un élément rectiligne isotherme, suivant lequel on a constamment $du = 0$, étant ainsi connue pour chaque fragment, définissons les divers points intérieurs du fragment au moyen de trois coordonnées rectangulaires, x, y, z, dont la troisième soit, par exemple, sensiblement nulle sur le feuillet moyen, où les deux premières x, y recevront toutes leurs valeurs relatives au fragment; et, pour fixer les idées, prenons respectivement perpendiculaires aux x et aux y deux des sections normales limitant latéralement le fragment. Les flux de chaleur F_x, F_y qui les traverseront seront toujours certaines fonctions linéaires des trois dérivées partielles $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$. Or la condition très approchée $du = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0,$$

quand les différentielles dx, dy, dz auront entre elles les rapports convenant à l'élément rectiligne isotherme dont il vient d'être parlé, permettra d'exprimer à très peu près la dérivée $\frac{du}{dz}$ en fonction linéaire de $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ et, par suite, d'éliminer cette dérivée des valeurs de F_x, F_y, où, de plus, les dérivées subsistantes $\frac{du}{d(x, y)}$ différeront toujours fort peu de ce qu'elles seraient pour $z = 0$, c'est-à-dire sur le feuillet moyen.

Ainsi s'exprimeront à très peu près, *en fonction des valeurs de u sur le feuillet moyen où elles ne dépendent que de deux coordonnées,* les flux F_x, F_y nécessaires à considérer dans la question. Et les méthodes qui seront données plus loin permettront de former l'équation aux dérivées partielles régissant la variation éprouvée, d'un instant à l'autre, par la température u du feuillet moyen, en fonction de ses variations actuelles entre les divers points de ce feuillet.

Au reste, quand on se borne à une plaque plane et d'épaisseur constante extraite d'un milieu homogène, comme à une barre droite et prismatique découpée dans un pareil milieu, des analogies empruntées au cas même du milieu indéfini où l'une et

Digitized by Google

l'autre sont prises, avec surfaces isothermes planes ou cylindriques orientées comme celles de la barre et de la plaque, dispensent, pour former l'équation aux dérivées partielles, des laborieuses transformations de coordonnées que comporterait la méthode indiquée ici. C'est ce que nous verrons plus loin [1]; et nous démontrerons en particulier que, si l'on chauffe en un de ses points, M, une pareille plaque mince, supposée avoir été taillée ainsi dans un milieu homogène et être restée en place après l'enlèvement de la matière en excédent, les courbes isothermes qui se produiront dans son feuillet moyen seront concentriques et homothétiques par rapport à l'ellipse d'intersection de ce feuillet moyen et de l'ellipsoïde des conductibilités décrit autour du point chauffé M [2].

84. **Autre méthode pour l'étude des barres et des plaques.** — On peut encore former l'équation, aux dérivées partielles, qui régit la température *le long de l'axe* d'une barre mince, ou *aux divers points du feuillet moyen* d'une plaque de faible épaisseur, sans s'occuper de l'orientation qu'affectent dans ces corps les surfaces isothermes ou les courants de chaleur. Il suffit de les décomposer, idéalement, soit en tronçons prismatiques placés bout à bout, soit en fragments parallélépipédiques juxtaposés, dont les faces de contact avec les tronçons ou fragments contigus soient, non plus, comme nous l'avons indiqué, normales à l'axe ou au feuillet moyen, mais choisies de manière à être traversées par des flux dépendant seulement des dérivées partielles de u dans les sens ou de l'axe, ou du feuillet moyen.

S'il s'agit d'un tronçon de barre dont l'axe soit dirigé suivant la droite MR′ de la *fig.* 13 (p. 140), on prendra des sections conjuguées, dans l'ellipsoïde principal, au rayon MQ de cet ellipsoïde. S'il s'agit d'un fragment de plaque ayant son feuillet moyen conjugué au même rayon MQ de l'ellipsoïde principal, on prendra, d'après la démonstration donnée précédemment (p. 152), deux systèmes de sections parallèles au rayon MR. Rien, évidemment, n'empêchera, si on le désire, de les mener suivant les côtés

---

(1) Dans la XXIIIe leçon (nos 160 et 161), au Tome second.
(2) Voir, au Tome II, la XXVIe leçon, no 172.

Digitized by Google

d'un petit rectangle quelconque tracé sur le feuillet moyen, de manière à donner des fragments ayant leurs bases rectangulaires ou exactement, ou sensiblement, et orientées, par exemple, quand la plaque est plane, suivant deux axes rectangles des x et des y choisis à volonté dans le plan du feuillet moyen.

Les flux de chaleur qui traversent les diverses faces des tronçons ou fragments obliquangles ainsi obtenus s'exprimeront en fonction de la température u, à fort peu près uniforme dans le tronçon ou fragment, et *de ses dérivées partielles le long de l'axe ou tangentiellement au feuillet moyen;* on sera donc dispensé de considérer la température ailleurs que le long de cette ligne ou sur l'étendue de cette surface : ce qui fera du problème des variations de u une question à une ou à deux coordonnées, au lieu des trois x, y, z, outre la quatrième variable indépendante t, dont le rôle est tout autre [1].

85. Application aux cristaux : cas où il y a un axe de symétrie principal. — Les corps régulièrement cristallisés sont constitués de la même manière dans toute leur étendue, par rapport à des axes coordonnés d'orientation constante. Ils présentent donc ce qu'on appelle l'*homogénéité* de structure, mais qu'on pourrait appeler, avec plus de précision, l'*homogénéité parallèle*. On conçoit en effet, comme l'avait remarqué déjà Barré de Saint-Venant, une homogénéité plus générale où les particules seraient toutes pareillement constituées, mais par rapport à des axes locaux affectant des orientations différentes; c'est ce qui se produit, par exemple, quand on plie en cylindre une mince lame rectangulaire cristallisée, dont on réunit deux bords opposés.

Si donc on décrit, autour de divers points d'un même cristal, l'ensemble des deux ellipsoïdes, principal et des conductibilités, ils

---

[1] C'est ce procédé que j'ai d'abord suivi antérieurement à 1867, avant d'avoir dégagé la notion de *courant calorifique*, pour étudier la propagation de la chaleur dans les barres et les plaques, et qui m'a conduit à l'ellipsoïde des conductibilités, considéré comme lieu de points isothermes des barres et de courbes isothermes des plaques (*Voir*, dans ma Thèse de doctorat, les § IX, X et surtout XIV à XVII, p. 43 à 53). C'est celui que j'emploie de préférence plus loin dans la XXIIIe leçon, ayant réussi à le dégager presque entièrement des calculs qu'y entraînaient les transformations de coordonnées.

Digitized by Google

y offrent partout mêmes dimensions, avec les mêmes dispositions dans l'espace.

Mais ce n'est pas tout. En mettant à part et en écartant les cristaux du dernier système cristallin, qui est le système triplement oblique, tous les autres présentent des particularités de forme extérieure, indices de symétries correspondantes dans la contexture interne, qui y simplifient plus ou moins les lois de la conductibilité. Tous, en effet, possèdent au moins un axe de symétrie principal, autour duquel une rotation d'une certaine fraction de circonférence amène le cristal en coïncidence avec lui-même, c'est-à-dire lui fait offrir, par rapport à des axes fixes dans l'espace, les mêmes circonstances de structure qu'il offrait avant cette rotation. Or, si l'on imagine qu'on eût tracé, autour d'un point M de l'axe de rotation dont il s'agit, autour du centre du cristal, par exemple, le système des deux ellipsoïdes, principal et des conductibilités, qu'y admet la matière (*fig.* 13, p. 141), système faisant corps avec celle-ci et entraîné par elle, la rotation effectuée ne pourra que l'avoir amené en coïncidence avec lui-même, comme elle y aura amené le cristal tout entier, dont ces deux ellipsoïdes expriment des propriétés calorifiques.

Donc le point C, commun aux deux ellipsoïdes, a dû revenir coïncider avec lui-même, quoiqu'il n'ait décrit qu'une partie de circonférence, et il se trouve nécessairement sur l'axe de rotation. Autrement dit, le diamètre commun aux deux ellipsoïdes est dirigé suivant l'axe de symétrie principal du cristal. Mais alors, si l'on avait projeté le demi-diamètre MC sur le plan tangent en C aux deux ellipsoïdes, cette projection, entraînée avec le plan tangent et avec tout le système, est revenue, elle aussi, en coïncidence avec elle-même après la même rotation incomplète, et elle est tenue de se réduire au point unique C de l'axe. En d'autres termes, le plan tangent en C est normal au diamètre CC′, dès lors axe de figure dans chacun des deux ellipsoïdes. Et, comme les ellipses EE′, FF′ conjuguées à cet axe sont homothétiques dans les deux, les autres axes affectent respectivement la même orientation et présentent entre eux un même rapport. Donc, en résumé, *les deux ellipsoïdes ont un axe commun, dirigé suivant l'axe de symétrie principal du cristal, et leurs deux autres axes sont pareillement orientés et proportionnels.*

Digitized by Google

On n'entrevoit pas d'autre simplification dans l'avant-dernier système cristallin, celui qui a pour type le prisme droit à base parallélogramme, où l'axe de symétrie principal est la droite joignant les milieux des deux bases, autour de laquelle une rotation d'une demi-circonférence amène évidemment le cristal en coïncidence avec lui-même.

86. Cas où le cristal offre, outre un axe principal, d'autres éléments de symétrie. — Mais, dans les systèmes plus réguliers, de nouvelles réductions se produisent. Et d'abord, s'il y a un second axe de symétrie principal, les deux ellipsoïdes, acquérant un nouvel axe commun, cessent d'être distincts. Ils se réduisent donc à l'ellipsoïde principal, et le milieu est ce que nous avons appelé *symétrique;* il possède un potentiel Φ des flux de chaleur. C'est donc ce qui arrivera, notamment, dans le système du prisme droit à base rectangle, qui admet comme axes de symétrie principaux les trois droites joignant les milieux des faces opposées, et qui comprend comme cas particuliers les deux systèmes du prisme droit à base carrée et du cube.

Une troisième cause de réduction se présente, alors même que l'axe de symétrie principal serait unique, quand la rotation qui, effectuée autour de cet axe, amène le cristal en coïncidence avec lui-même, est inférieure à un demi-tour. Alors la section faite, dans le système des deux ellipsoïdes, par tout plan mené suivant leur axe commun, doit évidemment venir se placer, après la fraction de tour dont il s'agit, sur les deux ellipsoïdes censés être restés fixes. Or cela n'arrive que si les deux ellipsoïdes sont de révolution.

Ils le seront donc, en effet, dans le système du prisme à base carrée, où la fraction de tour dont il s'agit est un quart, et où l'on a déjà vu que les deux ellipsoïdes se confondent.

Ils le seront aussi dans les deux systèmes, d'ordinaire associés, du prisme droit à base hexagonale régulière, où la rotation à effectuer autour de la droite des centres des bases est un sixième de circonférence, et du *rhomboèdre,* ou parallélépipède à faces losanges égales, où cette rotation autour de la diagonale joignant les deux bouts, lieux des sommets des angles plans égaux, égale un tiers de circonférence.

Digitized by Google

Dans ces derniers cas, s'il arrive de plus que le cristal coïncide avec lui-même par retournement et rotation, c'est-à-dire en laissant fixe le centre M, mais amenant l'une des bases ou l'un des bouts là où était l'autre et effectuant une rotation convenable autour de l'axe principal, le même retournement des ellipsoïdes produit par ce mouvement, et qui amène en C le sommet opposé C′, ne devra évidemment rien changer à la figure du système, que ne modifie d'ailleurs aucune rotation subséquente autour de CC′. Or le point particulier C, extrémité du rayon commun MC indicateur des conductibilités indirectes $\mathfrak{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, fait partie essentielle de cette figure, toutes les fois que les deux ellipsoïdes sont distincts. Il ne devient indéterminé et ne peut être placé indifféremment en C ou en C′, que lorsque ces conductibilités indirectes sont nulles à la fois. On devra donc avoir $\mathfrak{D} = 0$, $\mathcal{E} = 0$, $\mathcal{F} = 0$; et les deux ellipsoïdes, d'ailleurs de rotation autour de l'axe principal, se réduiront à un seul.

Sauf dans les deux derniers systèmes cristallins, les plus irréguliers, il doit donc être assez rare que l'ellipsoïde des conductibilités soit distinct de l'ellipsoïde principal (¹).

Enfin, dans le système cubique, où il y a plus d'un axe autour duquel une rotation inférieure à une demi-circonférence amène le cristal en coïncidence avec lui-même, les deux ellipsoïdes, ayant plusieurs axes de révolution communs, se réduisent à une sphère unique, comme s'il s'agissait d'un corps isotrope.

(¹) On a quelquefois émis l'opinion que, s'ils sont distincts ou, autrement dit, s'il y a des coefficients *rotationnels* $\mathfrak{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ (comme les appelle M. Charles Soret, physicien distingué de l'Université de Genève), une cassure produite dans le cristal, mais laissant en présence les parties du cristal contiguës avant la cassure, doit entraîner dans son voisinage, chez les surfaces isothermes, des anomalies notables, faciles à constater sur les faces des plaques minces, et qui n'ont cependant pas été observées. Mais on ne voit pas pourquoi ces anomalies se produiraient; car les conditions de raccordement, spéciales à la surface de la cassure, et qui consistent dans la double égalité, de part et d'autre, de la température et du flux passant à travers, sont parfaitement vérifiées dans l'hypothèse de l'absence de toute anomalie.

Digitized by Google

ONZIÈME LEÇON.

ÉQUATIONS RÉGISSANT LES VARIATIONS QU'ÉPROUVE, D'UN INSTANT A L'AUTRE, LA TEMPÉRATURE AUX DIVERS POINTS D'UN CORPS OU D'UN SYSTÈME DE CORPS.

87. Ce que devient l'équation de l'énergie d'un corps vibrant calorifiquement, quand on y introduit la température. — Maintenant que nous savons exprimer les flux de chaleur au moyen de la température u, nous pouvons reprendre l'équation de l'énergie (n° **44**, p. 97), appliquée à une portion quelconque ϖ d'un solide vibrant calorifiquement, pour en déduire l'équation aux dérivées partielles qui régit cette fonction u.

Le premier membre de l'équation rappelée est l'accroissement d'énergie du volume ϖ durant un instant dt, savoir (p. 97)

$$dt \int_{\varpi} \mathrm{C} \frac{du}{dt} d\varpi. \tag{103}$$

Le second membre, dans le cas relativement simple d'un corps athermane sans source intérieure de chaleur, sera la somme des flux entrés durant le même instant par toute la surface σ du volume ϖ, ou, ce qui revient sensiblement au même (p. 101), la somme des flux qui auront traversé, en venant du dehors, toutes les parties de cette surface. Appelons :

$d\sigma$ un élément quelconque de la surface σ, et $\int_{\sigma}$ une intégrale étendue à tous les éléments de σ;

α, β, γ les angles que fait avec les x, y, z positifs une petite normale dn à $d\sigma$, menée d'un point intérieur infiniment voisin, et

Digitized by Google

censée prise, par conséquent, avec la direction qu'elle aurait, si on la prolongeait hors du volume ϖ;

enfin, F_n le flux entrant, par unités d'aire et de temps, à travers cet élément $d\sigma$, flux relié aux trois flux principaux F_x, F_y, F_z, relatifs aux axes et considérés au même endroit (x, y, z), par la formule (27) (p. 110),

$$F_n = F_x \cos\alpha + F_y \cos\beta + F_z \cos\gamma. \tag{104}$$

Pour l'élément $d\sigma$ et pendant l'instant dt, le flux sera $F_n d\sigma dt$, et, à travers toute la surface σ,

$$dt \int_\sigma F_n d\sigma. \tag{105}$$

On pourra donc égaler les deux expressions (103) et (105).

Si le corps est diathermane, chaque élément $d\varpi$ recevra en outre de son éther, comme on a vu (p. 104), une quantité de chaleur proportionnelle à $d\varpi$, à dt, et croissante avec l'excédent $u_e - u$, dont elle aura le signe, de la température u_e de l'éther, au même endroit (x, y, z), sur celle, u, de l'élément $d\varpi$. Nous supposerons donnée directement en x, y, z et t la température u_e de l'éther. Dans un corps diathermane assez peu épais pour que toutes ses parties ne soient pas trop loin d'une masse fluide environnante de grande étendue, gazeuse ou même liquide, et portée ou maintenue partout, grâce à ses courants intérieurs, à une température uniforme connue, on pourra, ce semble, du moins à titre d'hypothèse simple, supposer tout l'éther du corps à cette température extérieure, que nous appellerons aussi u_e, l'indice e rappelant indifféremment qu'il s'agit soit de la température *extérieure*, soit de celle de l'*éther*.

Et si enfin, pour plus de généralité encore, l'élément $d\varpi$ est une source de chaleur, c'est-à-dire le théâtre de transformations internes y accroissant l'agitation calorifique (p. 104), il s'ajoutera, à l'expression précédente de la chaleur venue de l'éther, une nouvelle expression, de la forme $S d\varpi dt$, où S, chaleur dégagée intérieurement par unités de volume et de temps, sera une fonction que nous supposerons directement donnée en x, y, z, t.

Toutefois, il se pourra que la chaleur S créée sur place dépende aussi de la température u de l'élément $d\varpi$ de volume; et nous

Digitized by Google

n'écarterons généralement pas un tel cas, pourvu que S varie alors en sens inverse de u.

Nous appellerons $\varphi(x, y, z, t, u)\,d\varpi\,dt$ la somme des deux expressions précédentes : φ désignera donc une fonction connue, variable en sens inverse de u, et se réduisant (sauf quand les sources auront leur débit variable avec la température) à un terme de la forme $S(x, y, z, t)$ soit quand le milieu sera athermane, soit quand on aura $u = u_e$. En tout, la chaleur venue dans le volume ϖ autrement que par conductibilité sera

$$(106) \qquad dt\int_{\varpi}\varphi(x, y, z, t, u)\,d\varpi, \quad \text{ou simplement} \quad dt\int_{\varpi}\varphi\,d\varpi.$$

Il faudra donc égaler l'accroissement (103) d'énergie à la somme des expressions (105) et (106); ce qui, en ramenant le phénomène à l'unité de temps, c'est-à-dire en divisant par dt, donne

$$(107) \qquad \int_{\varpi} C\frac{du}{dt}\,d\varpi = \int_{\sigma} F_n\,d\sigma + \int_{\varpi}\varphi\,d\varpi.$$

Il n'y figurera aucune autre fonction inconnue que u ou ses dérivées partielles premières en divers points de l'espace ϖ, lorsqu'on y aura substitué à F_n sa valeur (104) en F_x, F_y, F_z, et, à celles-ci, leurs expressions (31) (p. 115) en $\frac{du}{d(x, y, z)}$ et u, dont les leçons précédentes nous ont fait connaître les formes plus ou moins simples.

88. Équation indéfinie, aux dérivées partielles, de la température. — La relation complexe (107) devient une simple équation aux dérivées partielles, quand le volume ϖ se réduit à un élément, $d\varpi$, de la forme correspondant aux coordonnées choisies x, y, z, c'est-à-dire à un parallélépipède MABCD (*voir* page suiv.) construit, à partir du point intérieur quelconque $M(x, y, z)$, sur trois arêtes $MA = dx$, $MB = dy$, $MC = dz$, ayant les directions des x, y, z positifs, et des grandeurs tout à la fois assez petites, par rapport aux chemins le long desquels u varie sensiblement, pour pouvoir être assimilées à des différentielles, et assez grandes, pour contenir un nombre immense de fois le rayon d'activité des actions moléculaires.

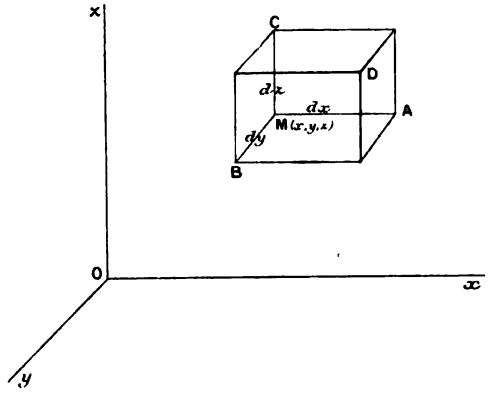
Digitized by Google

Alors le premier et le dernier terme de (107) sont respectivement $C\frac{du}{dt}d\varpi$ et $\varphi d\varpi$.

Quant au second terme $\int_\sigma F_n d\sigma$, il se compose évidemment de six parties, une pour chacune des six faces de l'élément de volume.

Occupons-nous d'abord des deux parties $F_n d\sigma$ pour lesquelles $d\sigma$ est $dy\,dz$, c'est-à-dire relatives aux deux faces BMC, AD nor-

Fig. 14.



males aux x. On peut regarder ces deux faces comme les deux positions successives d'un élément plan, dont les divers points conserveraient sans cesse leurs coordonnées respectives suivant les y et z, tandis que leur coordonnée commune x grandirait. Le flux qui les traverse par unité de temps, en venant du côté des x positifs, est donc, à l'époque t, une certaine fonction de la variable unique x si l'élément ne se déplace que suivant MA, fonction graduellement variable par hypothèse, comme l'état physique, dans tout l'intérieur du corps étudié. Or il est clair que le flux $F_n\,d\sigma$ entrant par la face BMC représente sa valeur en M, changée de signe, tandis que le flux $F_n\,d\sigma$ entrant par la face AD représente simplement sa valeur suivante, ou relative à la valeur $x + dx$ de la variable. La somme algébrique des deux flux entrés est donc la différentielle en x de la même fonction, c'est-à-dire le produit, par dx, de sa dérivée en x, ou le produit, par $d\sigma\,dx$, de

Digitized by Google

la dérivée en x de son quotient par l'aire constante $d\sigma$ de l'élément plan mobile, quotient constituant, par définition, le flux F_x à travers l'unité d'aire, pris en $M(x, y, z)$. La somme des deux flux considérés est donc, identiquement,

$$\frac{dF_x}{dx}\,dx\,d\sigma, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{dF_x}{dx}\,d\varpi.$$

De même, les deux éléments CMA, BD, normaux aux y, donneront deux flux ayant la somme $\frac{dF_y}{dy}\,d\varpi$; et, les deux éléments plans AMB, CD, normaux aux z, deux flux ayant la somme

$$\frac{dF_z}{dz}\,d\varpi.$$

En tout, l'équation (107), divisée par $d\varpi$ ou rapportée à l'unité de volume, deviendra l'équation suivante, où les divers termes sont pris pour les valeurs de x, y, z au point unique M,

$$(108) \qquad C\frac{du}{dt} = \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz} + \varphi(x, y, z, t, u).$$

Les flux principaux F_x, F_y, F_z étant des fonctions linéaires connues de $\frac{du}{d(x, y, z)}$, on voit que, dans le cas ordinaire où u varie entre des limites assez peu écartées pour ne modifier, d'une manière appréciable, ni la capacité calorifique C, ni les coefficients de conductibilité, la relation (108) sera une équation linéaire aux dérivées partielles en u, du premier ordre par rapport au temps t, mais du second par rapport aux coordonnées x, y, z. Elle fera donc connaître, pour chaque endroit (x, y, z) du corps, la dérivée $\frac{du}{dt}$, c'est-à-dire le changement élémentaire de la température, en fonction de celle-ci telle qu'elle est, actuellement, au point (x, y, z) et autour dans un rayon infiniment petit.

89. Autre démonstration, où cette équation est établie à partir de volumes quelconques. — L'équation (107), beaucoup plus compliquée et semblant plus générale que (108), ne revient cependant qu'à celle-ci, quand on tient compte de la relation (104) entre les flux relatifs à un même point. Pour le démon-

Digitized by Google

trer, il suffit, après avoir dédoublé l'intégrale de surface $\int_\sigma F_n\, d\sigma$, d'après (104), en trois autres, qui sont

$$\int_\sigma F_x \cos\alpha\, d\sigma, \quad \int_\sigma F_y \cos\beta\, d\sigma, \quad \int_\sigma F_z \cos\gamma\, d\sigma,$$

de convertir celles-ci en des intégrales de volume, par l'emploi d'une formule du Calcul intégral, bien connue [1], qui donne ici, F_x, F_y, F_z étant continus dans tout le volume ϖ,

$$\int_\varpi \frac{dF_x}{dx}\, d\varpi, \quad \int_\varpi \frac{dF_y}{dy}\, d\varpi, \quad \int_\varpi \frac{dF_z}{dz}\, d\varpi.$$

L'équation (107), ne comprenant ainsi, à tous ses termes, que des intégrales de volume, devient immédiatement, si l'on y transpose au premier membre tous les termes du second,

$$(109) \qquad \int_\varpi \left(C\frac{du}{dt} - \frac{dF_x}{dx} - \frac{dF_y}{dy} - \frac{dF_z}{dz} - \varphi \right) d\varpi = 0.$$

Or, par hypothèse, la fonction entre parenthèses, sous le signe $\int$, est formée de termes variant tous graduellement avec x, y, z; et elle se trouve continue. Admît-elle quelques discontinuités, que si elle n'est pas nulle partout, elle aurait, du moins, même signe dans des étendues finies. Choisissons les limites de l'une quelconque de ces etendues pour celles de l'espace ϖ. Alors l'intégrale du premier membre, à éléments tous de même signe, ne pourra égaler le second membre zéro, qu'à la condition de s'annuler elle-même identiquement. Et l'on voit d'ailleurs que l'équation ainsi écrite n'est autre que (108), appliquée successivement à tous les points intérieurs (x, y, z) du corps.

Cette démonstration de l'équation (108) a, sur la première plus simple, l'avantage de ne pas employer la formule (107) dans l'hypothèse d'un aussi petit volume que notre élément MABCD (*fig.* 14), dont on pourrait craindre que les dimensions ne fussent pas assez grandes, par rapport au rayon d'activité des actions moléculaires, ou même par rapport aux intervalles de molécules voi-

---

[1] *Voir*, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, second fascicule, p. 93 *.

Digitized by Google

sines, pour justifier les considérations antérieures relatives aux notions de température, de flux, etc., où nous avions admis, en quelque sorte, l'infinie petitesse relative de ces longueurs. Il est vrai que, pour transformer en (109), et puis en (108), l'équation (107), il faudra toujours supposer la continuité en x, y, z, tout au moins très approchée, de la température u et des flux F_x, F_y, F_z; ce qui paraît impliquer à peu près les mêmes hypothèses d'extrême petitesse. Toutefois, il n'est pas impossible que les fonctions continues de t et de x, y, z appelées ici u, F_x, F_y, F_z, puissent être formées par l'interpolation (ou intercalation) d'une infinité de valeurs fictives, entre un nombre relativement restreint de valeurs réelles se rapportant à des points isolés, altérées même, légèrement, ou remplacées par des moyennes, s'il le faut pour *uniformiser* la marche des fonctions en x, y, z; et l'on conçoit qu'alors la démonstration actuelle pourrait s'appliquer encore, dans des cas où les éléments matériels de volume supposés par la première démonstration n'existeraient pas.

90. Chaleur que les flux introduisent en chaque endroit, par unités de volume et de temps. — L'équation (107) ayant, dans tous ses termes, une signification géométrique et physique indépendante des coordonnées choisies, il résulte évidemment de l'équivalence de cette équation à (108) que celle-ci doit comporter également une pareille signification; et, comme ses premier et dernier termes en ont une immédiate, leur différence, c'est-à-dire l'expression

$$\frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}, \tag{110}$$

doit en admettre également une. Excédent de la chaleur totale $C\frac{du}{dt}$ gagnée, en (x, y, z), par l'unité de volume et dans l'unité de temps, sur celle, $\varphi(x, y, z, t, u)$, qui l'a été autrement que par conductibilité, elle représente la chaleur acquise par conductibilité, encore à l'endroit (x, y, z) et par unités de volume et de temps, c'est-à-dire la chaleur due aux flux émanés de la matière environnante et évaluant les travaux calorifiques des actions moléculaires exercées, du dehors, à travers la surface de la particule que l'on considère.

Digitized by Google

Cette expression a donc sa valeur indépendante des coordonnées choisies. On le reconnaît en appliquant à deux systèmes rectangulaires de coordonnées, appelées respectivement x, y, z et X, Y, Z, les formules de transformation (44) (p. 125) et les analogues des suivantes (46). Ces formules donnent, par exemple,

$$F_x = aF_X + bF_Y + cF_Z, \qquad \frac{dF_x}{dx} = a\frac{dF_x}{dX} + b\frac{dF_x}{dY} + c\frac{dF_x}{dZ},$$

et, par suite,

$$(111)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dF_x}{dx} &= \left(a\frac{d}{dX} + b\frac{d}{dY} + c\frac{d}{dZ}\right)\left(aF_X + bF_Y + cF_Z\right) \\ &= a^2\frac{dF_X}{dX} + b^2\frac{dF_Y}{dY} + c^2\frac{dF_Z}{dZ} \\ &\qquad + bc\left(\frac{dF_Y}{dZ} + \frac{dF_Z}{dY}\right) + ca\left(\frac{dF_Z}{dX} + \frac{dF_X}{dZ}\right) + ab\left(\frac{dF_X}{dY} + \frac{dF_Y}{dX}\right) \end{aligned}\right.$$

On forme de même les expressions, en X, Y, Z, des deux autres termes de (110); et, en tenant compte des six relations connues entre les neuf cosinus a, b, c, a', ..., c'', il vient

$$(112)\qquad \frac{dF_x}{dy} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz} = \frac{dF_X}{dX} + \frac{dF_Y}{dY} + \frac{dF_Z}{dZ};$$

ce qui prouve qu'une expression de la forme (110) a bien la même valeur, en chaque point de l'espace, dans tous les systèmes de coordonnées rectangles.

91. Existence de conditions spéciales aux surfaces limites. — L'équation (108), supposant l'état physique graduellement variable avec les coordonnées, *tout autour* du point (x, y, z) auquel on l'applique, n'exprime pas les relations du corps considéré avec *le dehors*. Les circonstances qu'offrira le refroidissement ou l'échauffement à chaque surface limite, d'après la nature et l'état du milieu extérieur, doivent donc s'adjoindre à l'équation aux dérivées partielles (108), pour compléter la détermination de la suite des températures *même intérieures*. Autrement dit, ces circonstances fourniront dans le problème une donnée spéciale, qu'il nous reste à formuler analytiquement.

Si nous imaginons, autour du corps, sa couche superficielle,

Digitized by Google

d'une épaisseur totale imperceptible, les flux par unités d'aire et de temps seront, comme nous avons vu (p. 107), égaux à travers ses deux faces. Or, à travers la face interne, qui fait partie de l'intérieur du corps, le flux F_n entrant dans celui-ci est donné par la formule (27), ou (104) ci-dessus, facile à rendre explicite en

$$\frac{du}{d(x, y, z)},$$

comme elle l'est déjà relativement aux trois cosinus directeurs $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ de la normale dn à la surface : il suffit d'y remplacer F_x, F_y, F_z par leurs expressions propres à la matière donnée. On l'égalera au flux entrant au même endroit par la face externe, flux connu directement ou indirectement, sous une forme plus ou moins implicite, mais définie, puisqu'on devra toujours se donner les relations calorifiques extérieures du corps pour que le problème ne reste pas indéterminé. Et cette égalité, où figurera généralement u avec ses dérivées partielles premières en x, y, z, sera la condition cherchée. On l'appelle une relation *définie,* parce qu'elle n'a lieu que pour des points spéciaux, savoir, ceux (x, y, z) de la surface ; et l'équation aux dérivées partielles (108), vérifiée, au contraire, en *tous* les points (x, y, z) du corps, est appelée par opposition l'équation *indéfinie*.

92. Échauffement ou refroidissement par rayonnement. — Commençons par le cas d'une *surface libre,* où le corps se trouvera en rapport soit avec l'éther seul (éther du vide), soit avec une atmosphère gazeuse, toujours beaucoup moins dense que le corps, et aussi avec son éther, les gaz étant diathermanes.

Et d'abord, si le milieu extérieur est de l'éther pur, on peut regarder comme évident, par le principe général de l'équilibre de température (p. 94), que la couche superficielle lui prendra ou lui cédera de la chaleur, suivant que la température u du corps, *sous* cette couche, *) sera inférieure ou supérieure à celle, u_e, de l'éther. Celle-ci étant censée connue en fonction de x, y, z, t, ainsi que la nature et l'état physique de la superficie du corps, le flux *entrant* sera une certaine fonction ψ de x, y, z, t et u, variable en sens inverse de u.

*) See p. XXVII.

Digitized by Google

On aura donc comme condition spéciale,

$$(113)\qquad \begin{cases} F_n = \psi(x, y, z, t, u), \\ \text{ou} \\ F_x \cos\alpha + F_y \cos\beta + F_z \cos\gamma = \psi(x, y, z, t, u). \end{cases}$$

Quand l'écart des deux températures u intérieure et u_e extérieure n'est pas trop grand, la fonction ψ de u, c'est-à-dire de $u_e - (u_e - u)$, peut se développer par la série de Taylor suivant les puissances de $u_e - u$, et, s'annulant avec $u_e - u$, être même réduite à son terme du premier degré.

Cette fonction prendra ainsi sa forme usuelle $k(u_e - u)$, linéaire en u, où k, fonction de la nature de la couche superficielle, de son degré de poli ou de rugosité, et aussi de la température extérieure u_e, est ce qu'on appelle le *coefficient de conductibilité extérieure,* ou, simplement, la *conductibilité extérieure.* Celle-ci varie donc, en particulier, et dans une large mesure, avec le degré de poli ou de rugosité, c'est-à-dire avec l'état géométrique de la surface; car les accroissements notables de l'aire développée ou réelle dus aux aspérités de la superficie, multiplient considérablement les rapports du dehors avec le dedans. Ils doivent donc faire grandir la conductibilité extérieure. D'ailleurs, dans le cas, ordinaire, où la température absolue $273° + T + u_e$ de l'éther ne variera que de petites fractions de sa valeur totale, on pourra négliger les changements de k en fonction de u_e; et ce coefficient sera alors, comme la capacité calorifique C et comme les conductibilités intérieures K, ou K′, K″, K‴, ..., une simple constante *spécifique,* mais dépendant, de plus que ces autres constantes, de l'état géométrique de la surface. Enfin, quand la contexture n'est pas isotrope, k peut dépendre encore de la direction suivant laquelle la face dont il s'agit aura été taillée dans le corps.

La condition définie d'échauffement ou de refroidissement *par rayonnement* pur dans l'éther, à la surface libre d'un corps, sera donc

$$(114)\qquad F_n = k(u_e - u).$$

C'est, vu l'expression (104) de F_n, une relation linéaire entre u et ses trois dérivées partielles en x, y, z, sous la couche superficielle. Et elle régit, comme on voit, les transformations de chaleur

Digitized by Google

rayonnante en chaleur condensée, ou *vice versa,* qui ont lieu aux surfaces libres des corps.

93. **Analogie et contraste des deux conductibilités intérieure et extérieure.** — Il est digne de remarque que les flux de même valeur, à travers les deux faces interne et externe de la couche superficielle d'un corps placé dans le vide, soient régis, le premier, F_n, à la face interne, par des *pentes finies* de la température, et au contraire, le second, $k(u_e - u)$, par la *chute finie* $u_e - u$ de température entre le dehors et le dedans, à travers l'épaisseur insensible de la couche superficielle; ce qui implique une *pente* pour ainsi dire infinie à l'entrée du corps, là où se forme ce second flux. Les actions à travers la surface libre ont donc incomparablement moins d'énergie, pour propager d'un côté à l'autre l'agitation calorifique, que n'en ont les actions à travers la surface de contact de deux particules d'un même corps ou de deux corps pondérables. En d'autres termes, la conductibilité intérieure est incomparablement plus efficace, à égalité de sollicitation, que la conductibilité extérieure ou superficielle. La raison évidente en est dans l'extrême petitesse de la densité de l'éther, petitesse réduisant presque à zéro son action actuelle ou comme instantanée sur les corps et la prise des corps sur lui.

Ce n'est donc que grâce à des pentes de température hors de proportion avec celles qui ont lieu entre corps contigus ou entre particules pondérables en contact, que les échanges d'énergie vibratoire de l'éther avec les corps peuvent devenir comparables à ceux qui se font entre corps se touchant. Quand on crée, par extraordinaire, une chute aussi rapide que celles-là entre particules pondérables, comme, par exemple, quand on met en contact deux corps inégalement chauds, il se produit à travers leur surface devenue commune un flux calorifique énorme, pour ainsi dire infini, qui *nivelle* presque instantanément la chaleur de part et d'autre, ou, du moins, rétablit la continuité de la température et en modère les *pentes*. Les plus mal conduisants d'entre eux se mettent très rapidement, et sous des épaisseurs sensibles, en équilibre de température avec leurs voisins; en sorte que l'éther est de beaucoup, à cet égard, le plus mauvais conducteur de tous.

Digitized by Google

94. Échauffement ou refroidissement par convection. — Passons maintenant au cas ordinaire d'une surface libre où le corps est en contact avec une atmosphère gazeuse, toujours beaucoup moins dense que lui, et en repos ou, plus généralement, animée d'un mouvement uniforme de transport, abstraction faite des courants intérieurs, de sens divers, qui pourront s'y produire. Ces courants naîtront surtout des inégalités de température, qui, dilatant les couches gazeuses en train de s'échauffer, condensant les couches en train de se refroidir, feront monter les premières, descendre les secondes, sous la poussée du fluide ambiant, soustrairont ainsi les unes et les autres aux causes qui les rendaient plus chaudes ou plus froides que l'ensemble, et, mélangeant sans cesse toutes les couches, y créeront ou y maintiendront sur des étendues considérables une température sensiblement uniforme.

Nous supposerons une telle uniformité réalisée dans d'assez grands espaces pour que l'éther lui-même y participe; et nous pourrons ainsi admettre, tant pour l'éther que pour l'atmosphère, une température commune u_e [1], donnée en fonction très lentement variable de x, y, z, t.

Alors, si l'on considère un élément $d\sigma$ de la surface libre, sous lequel la température soit u, l'éther lui enverra, par unités d'aire et de temps, la quantité de chaleur $k(u_e - u)$, comme dans le cas du rayonnement pur, avec une valeur peut-être un peu moindre du coefficient k, à raison de l'incomplète diathermanéité de l'atmosphère.

Mais, surtout, la différence de température entre la masse de l'atmosphère et la couche superficielle du corps donnera lieu, contre l'élément $d\sigma$, à un courant de gaz, dont la vitesse croîtra avec cette différence. Car, malgré le défaut presque total de conductibilité de ces fluides, la couche gazeuse en contact avec le corps, refroidie ou chauffée et, par suite, condensée ou dilatée, glissera sur la surface $d\sigma$ en descendant ou en montant, pour être remplacée par une autre qui éprouvera les mêmes changements

---

[1] On verra plus loin (n° 115) que cette hypothèse simplificatrice n'est pas toujours acceptable; mais il serait peut-être prématuré de parler ici des cas difficiles où son *accommodation* aux phénomènes nécessitera des explications spéciales.

Digitized by Google

et mouvements. Entre le corps et la masse atmosphérique un courant continu, descendant ou ascendant, se produira donc; et les molécules gazeuses y auront la fonction d'apporter ou de prendre de la chaleur au corps, suivant que la différence $u_e - u$ sera positive ou négative. Elles joueront le rôle de véhicules transportant de la chaleur. Aussi ce mode ~~de refroidissement~~ d'échauffement ou de refroidissement ou d'échauffement, par un agent matériel qui, plus mobile que conducteur, se déplace lui-même, s'appelle-t-il échauffement ou refroidissement *par convection*.

Le flux ainsi apporté à la surface, dépendant de la différence $u_e - u$ et ayant même signe qu'elle, pourra être supposé proportionnel à $u_e - u$, comme le flux apporté par l'éther, et pour les mêmes raisons. L'on aura donc un flux total encore de la forme $k(u_e - u)$, mais avec un coefficient k plus grand que dans le cas du rayonnement pur. Il l'excédera même beaucoup, relativement, pour une raison qu'on verra bientôt.

En résumé, la condition spéciale à une surface libre, quand le corps y sera battu par une atmosphère gazeuse, aura sensiblement la même forme (114) que dans le cas du rayonnement pur, mais avec une valeur plus forte, et surtout plus complexe, de la *conductibilité extérieure k*.

95. **Raison d'une conductibilité extérieure alors beaucoup plus grande; échauffement et refroidissement par contact.** — Pour comprendre comment il se fait qu'un gaz, d'une densité assurément faible, mais cependant un peu comparable à la densité du corps étudié, donne par sa convection une conductibilité extérieure k beaucoup plus forte que celle du corps au contact de l'éther pur, il suffit de penser à ce que serait la valeur de k dans une atmosphère, ou enveloppe fluide, presque aussi dense que le corps lui-même. Alors, d'après les considérations d'un numéro précédent (p. 173), les échanges de chaleur seraient énormes entre la couche superficielle du corps et celle du fluide ambiant, jusqu'à ce que la *pente* de température existant de l'une à l'autre se fût modérée, c'est-à-dire jusqu'à ce que la *chute absolue* de la température entre elles fût devenue absolument insignifiante, comme l'est l'épaisseur des couches dont il s'agit. Donc, les flux ne pouvant être énormes que très exceptionnellement (p. 102),

Digitized by Google

les deux couches en question acquerraient bientôt une même température, ou à très peu près. Et comme, d'autre part, la grande mobilité du fluide y assure, ainsi qu'on l'admet, la quasi-uniformité de température dans tout espace de dimensions même assez sensibles, cette température du gaz contre le corps ne pourrait pas non plus, au bout de quelques instants, différer notablement de celle, u_e, qui règne dans sa masse. Donc, pour des flux $k(u_e - u)$ modérés, on aurait le facteur $u_e - u$ extrêmement petit et, par suite, l'autre facteur k très grand. Ainsi k devient très grand quand le milieu fluide a sa densité comparable à celle du corps ; et l'on comprend qu'avec les densités assez sensibles des gaz k puisse atteindre des valeurs notables, surtout quand l'atmosphère échauffante ou refroidissante est animée, par rapport au corps, d'une translation amenant sans cesse contre le corps de nouvelles couches gazeuses.

On voit par là ce qui arrivera si le corps, au lieu d'être en contact avec une simple atmosphère, l'est avec une masse liquide, très mobile et très dilatable par la chaleur, quoique à des degrés moindres que les gaz, mais, par contre, plus conductrice que ceux-ci pour la chaleur, et à laquelle, par suite, les courants intérieurs assureront encore la quasi-uniformité de la température u_e dans des espaces étendus. Comme la densité du fluide est, alors, tout à fait comparable à celle du corps, la différence $u_e - u$ deviendra, presque instantanément, insensible ; et la condition à la surface, propre à remplacer (114), sera

$$(115) \quad u_e - u = 0, \quad \text{ou} \quad u = u_e = \text{une fonction connue de } x, y, z, t,$$

relation constituant un cas particulier, ou plutôt un *cas limite* de (114), savoir, celui où la conductibilité extérieure k devient infinie sans que le flux F_n cesse d'être fini.

On dit alors que l'échauffement ou le refroidissement ont lieu *par contact*. La température u, sous la surface, s'y trouve donc directement donnée.

96. Des cas où le flux entrant est directement donné. — Un cas *limite* opposé de la même formule (114), savoir, celui d'une *conductibilité extérieure* k nulle, est presque aussi intéressant par sa simplicité. Aucun flux ne pénétrant alors dans le corps, ni

Digitized by Google

n'en sortant, on dit que la surface est *imperméable* à la chaleur. L'on a évidemment pour relation définie

$$F_n = 0. \tag{116}$$

Ce cas est compris dans un autre *cas limite* de la formule (114), celui où l'on se donnerait directement, en fonction de x, y, z, t, non pas la température u sous la surface, mais le flux F_n qui y pénètre, comme il arriverait si des sources calorifiques, d'un débit connu par unité d'aire, existaient à la superficie du corps. On le déduit de (114) par la double hypothèse d'une conductibilité extérieure k extrêmement petite et d'une température extérieure donnée u_e très grande; en sorte que, dans (114), le produit $-ku$ s'évanouisse, mais non le produit ku_e, dès lors fonction donnée de x, y, z, t.

On peut aussi généraliser un peu la condition (114), en appelant $S_1(x, y, z, t)$, par analogie avec notre expression habituelle S des sources intérieures, la chaleur que des sources superficielles connues déverseraient directement dans le corps à travers l'unité d'aire de sa surface, en outre de la chaleur $k(u_e - u)$ rayonnée par l'éther ambiant ou apportée par convection. L'on aura donc alors

$$F_n = S_1(x, y, z, t) + k(u_e - u), \tag{117}$$

relation comprise encore dans (113).

97. Conditions relatives à la surface de séparation de deux corps ou de deux parties d'un même corps. — Il peut arriver enfin qu'il y ait contact entre deux solides hétérogènes, ou, abstraction faite de toute hétérogénéité, que l'on doive exprimer la contiguïté de deux parties d'un même corps, dans des formules de température contenant d'autres variables que x, y, z pour définir les situations des divers points. Alors une mince couche séparative de matière, idéalement prise en partie à l'un des corps ou à l'une des régions et en partie à l'autre corps ou à l'autre région, a ses deux faces traversées dans le même sens par des flux égaux (p. 107); et, de plus, les densités des deux corps étant comparables, la *chute absolue* de la température, entre ces deux faces, est insensible. Si donc on appelle u la fonction de x, y, z, t exprimant la température en deçà de la première face, dn la normale menée en (x, y, z)

Digitized by Google

à cette face en allant vers l'autre, F_n le flux correspondant qui vient de la couche séparative, et, de même, u' la fonction de x, y, z, t exprimant la température *au delà* de la seconde face, dn' la normale, de sens opposé à dn, qu'on y mène en allant vers la première face, enfin $F_{n'}$ le flux qui traverse cette seconde face en venant encore de la couche séparative, l'on aura en tous les points de la surface de séparation les *deux* conditions spéciales, dites quelquefois *conditions de raccordement*,

$$(118) \qquad u = u', \qquad F_n + F_{n'} = 0.$$

Les deux flux F_n, $F_{n'}$, donnés, de chaque côté de la couche ou surface séparative, par la formule (104) (p. 164), seront respectivement, l'un, F_n, une fonction linéaire des trois dérivées $\frac{du}{d(x, y, z)}$, l'autre, $F_{n'}$, une fonction linéaire de $\frac{du'}{d(x, y, z)}$. La couche séparative étant d'épaisseur négligeable, il faudra, dans les relations (118), prendre ces fonctions, ainsi que u et u', pour les mêmes valeurs de x, y, z, savoir, celles qui vérifient l'équation de la commune surface limite des deux corps ou des deux parties considérées du même corps. Quant aux cosinus directeurs, $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\cos(\alpha', \beta', \gamma')$, des normales dn et dn', ils y seront évidemment deux à deux égaux et contraires.

On peut enfin imaginer le cas où une source calorifique d'une intensité énorme par unité de volume s'étendrait en couche mince sur la surface séparative, en déversant par unité d'aire, dans les deux milieux contigus, un débit $S_1(x, y, z, t)$ donné, et même, si l'on veut, en maintenant entre les deux températures u et u' une différence sensible $\Delta(x, y, z, t)$ également donnée. Les deux conditions (118) seraient alors remplacées par celles-ci, plus générales,

$$(119) \qquad u = u' + \Delta(x, y, z, t), \qquad F_n + F_{n'} = S_1(x, y, z, t).$$

Nous verrons dans la prochaine leçon comment on reconnaît que l'équation indéfinie (108), complétée par les relations définies (113) et (119), admet une solution, quand on se donne arbitrairement en fonction de x, y, z la température *initiale* des divers points des corps, c'est-à-dire leur température à une époque désignée prise comme origine des temps t; et aussi comment l'on démontre que cette solution est unique, ou que le problème des

Digitized by Google

variations *ultérieures* de la température se trouve complètement défini par l'ensemble des équations obtenues. Nous y verrons encore que, si le temps t n'entre pas explicitement dans les équations (108), (113), (119) du problème, en sorte que le système puisse tendre vers un *état permanent,* celui-ci se trouvera, également, complètement déterminé. En d'autres termes, les équations différentielles de l'état permanent n'admettent aussi qu'une solution.

Digitized by Google

DOUZIÈME LEÇON.

DÉTERMINATION COMPLÈTE DES TEMPÉRATURES SUCCESSIVES PAR LES ÉQUATIONS OU CONDITIONS PRÉCÉDENTES; CAS SIMPLES DU REFROIDISSEMENT ET DES TEMPÉRATURES STATIONNAIRES; PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSOÏDE PRINCIPAL DANS UN MILIEU HOMOGÈNE.

98. Existence d'une solution des équations ou conditions précédentes. — L'équation indéfinie (108) est vérifiée pourvu que la température u varie d'instant en instant, *sur place,* c'est-à-dire en un point quelconque (x, y, z) du corps, avec la *vitesse* $\frac{du}{dt}$ que donne cette équation en fonction de u et de ses dérivées *dans l'état actuel,* secondes ou premières, par rapport à x, y, z. Or on exprime ces *neuf* dérivées elles-mêmes, et linéairement, avec une approximation aussi grande qu'on veut, au moyen des différences existant entre la valeur de la fonction en (x, y, z) et ses valeurs tout autour ou, pour plus de précision, ses valeurs à l'extrémité de pareil nombre de droites suffisamment petites ds, émanées de (x, y, z) dans divers sens, comme, par exemple, dans les sens, opposés deux à deux, des x, y, z positifs et négatifs, quand les six dérivées *directes* de u en x, ou en y, ou en z, figurent seules dans l'équation; ce qui est, on le verra bientôt, le cas ordinairement traité [1]. Par suite, en prenant, dans le corps, un système de

[1] On y parvient par des emplois appropriés de la série de Taylor, appliquée, à partir des valeurs x, y, z des variables, de manière à développer les accroissements de u relatifs aux points entourant le point (x, y, z) considéré : on se borne, dans ces développements, aux termes qui contiennent les dérivées premières et secondes, devenues dès lors exprimables en fonction linéaire d'un nombre convenable de différences finies de u. *Voir,* à ce sujet, dans mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique,* le n° 96* (tome I,

Digitized by Google

points fixes assez rapprochés, nœuds d'un réseau à mailles très étroites formé d'éléments ds reliant chaque point à ceux qui l'entourent, on pourra, par l'équation (108) ainsi interprétée, calculer d'instant en instant des valeurs successives de u, *pour ces points,* en fonction de ses valeurs actuelles. Or, si ces valeurs successives continuent à différer peu, comme les valeurs actuelles, entre points voisins, leur ensemble jalonnera ou, vu cette graduelle variation même avec x, y, z, déterminera, pour les intervalles des points, une fonction u de x, y, z, t vérifiant à très peu près l'équation (108), et qui, à la limite, quand les mailles du réseau s'annuleront, sera une intégrale exacte, parfaitement continue, de (108).

Aux points intérieurs du corps ou du système considéré, la fonction u a donc, d'instant en instant, une manière possible de croître ou de décroître qui satisfait à (108); et l'on ne voit pas, du moins en général ou en principe, que ce mode de variation d'instant en instant puisse introduire des discontinuités entre points voisins, quand l'état initial n'en offre pas.

A l'approche de la surface limite du corps, les variations de u suivant l'épaisseur de la couche superficielle cessent d'être bien continues et sont régies par des lois que nos équations n'expriment pas. Il convient donc de s'arrêter à la face interne de la couche superficielle; et c'est cette face (pratiquement indiscernable de la face externe), qui sera pour nous la *surface-limite,* hors de laquelle nous ne considérerons plus de valeurs de u, si ce n'est pour les éliminer. Il est clair qu'alors, à cette surface-limite, ainsi définie, la détermination de $\frac{du}{dt}$ par (108) se fera encore de même, si l'on introduit au second membre des valeurs de u sur une surface enveloppant la surface-limite et constituée par un des premiers feuillets de la couche superficielle, sur lesquels les varia-

---

fascicule II, p. 133*) et surtout le n° 440* (tome II, fascicule II, p. 377*), où est abordée avec un peu plus d'étendue qu'ici (à certains égards) la question de l'existence d'une solution aux problèmes de *Physique mathématique.* Rien n'empêche d'ailleurs d'y faire changer à la fois plusieurs des variables x, y, z, à partir de leurs valeurs au point (x, y, z) considéré; et il faudra même le faire si l'on a à évaluer les trois dérivées *obliques* ou indirectes $\frac{d^2u}{dy\,dz}$, $\frac{d^2u}{dz\,dx}$, $\frac{d^2u}{dx\,dy}$, que le développement de Taylor ne contiendrait pas sans cela.

Digitized by Google

tions de u sont encore graduelles, et font suite aux valeurs de l'intérieur ou en sont comme le prolongement.

Il est vrai qu'on introduit ainsi des valeurs de u étrangères à l'espace ϖ auquel on voulait se borner, savoir, les valeurs réalisées à l'extrémité de petites droites ds, de sens quelconques, dont une émane de chacun des points (x, y, z) de la surface limite et aboutit à la surface enveloppante. Mais nous les éliminerons au moyen de la condition adjointe (113) ou (117). Et, d'abord, remplaçons ces valeurs de u, respectivement, par la somme de celle qui a lieu sur la surface-limite, au point de départ des droites ds, et de l'accroissement que reçoit celle-là le long des chemins ds. Puis, admettant, par exemple, en vue de fixer les idées et de simplifier, qu'on ait choisi pour les droites ds les éléments rectilignes dm' suivant lesquels la *pente* (montante) de température détermine le flux entrant F_n, substituons aux accroissements de u le long de ds leur expression linéaire en F_n. Les valeurs étrangères de u seront ainsi remplacées par les valeurs correspondantes de F_n, que la condition (113) ou (117) permettra d'exprimer en fonction de u à la surface; et les $\frac{du}{dt}$, tant pour les points superficiels que pour les points intérieurs, se trouveront être calculables en fonction des valeurs de u en ces divers points.

Cette élimination sera même inutile dans le cas d'une surface chauffée ou refroidie par contact; car on y connaîtra directement u et, par suite, $\frac{du}{dt}$. Alors ce seraient, à l'inverse, les valeurs de F_n, que l'équation (108) appliquée à la surface ferait connaître, s'il y avait lieu; car elle déterminerait la variation de u le long d'une droite élémentaire ds allant au dehors, seule inconnue qu'elle contînt après substitution de rapports de différences finies aux dérivées de u en x, y, z, ainsi qu'il a été dit.

Si le système matériel proposé comporte une surface de séparation, où devront être vérifiées les deux conditions de raccordement (118), ou même (119), on limitera encore chacun des deux corps contigus à la face en regard de leur imperceptible couche séparative commune; et l'équation (108) y donnera, en un point (x, y, z), comme dans le cas précédent, les valeurs de $\frac{du}{dt}$ en fonction linéaire de u en (x, y, z) ou aux points intérieurs voisins, et

Digitized by Google

de F_n (ou de $F_{n'}$) à travers cette même face, en (x, y, z) ou dans le voisinage. Alors, en prenant, conformément à la seconde relation (119), $F_{n'} = S_1 - F_n$, les $\frac{du}{dt}$, $\frac{du'}{dt}$, sur les deux faces en regard, seront, au fond, fonctions linéaires de F_n; et l'égalité $\frac{du}{dt} - \frac{du'}{dt} = \frac{d\Delta}{dt}$, déduite de la première (119) pour les divers endroits (x, y, z) de la couche, reviendra à un système, entre les F_n, d'un pareil nombre d'équations du premier degré, qui les déterminera en fonction des valeurs de u ou de u' à l'intérieur ou à la surface des deux corps contigus.

La fonction u aura donc généralement, en tous les points (x, y, z) du corps ou du système proposé, une vitesse $\frac{du}{dt}$ d'accroissement parfaitement possible, déterminée par les équations de la Leçon dernière, en fonction des températures u actuelles; ce qui permet de construire ou de se représenter de proche en proche, à partir de l'état initial donné, la marche de cette fonction, et d'affirmer par conséquent son existence. Et si, par suite de la complication du problème, ainsi que de sa grande généralité, il n'est pas facile d'établir dans tous les cas, surtout par une intuition rapide, la continuité que présentera cette solution en x, y, z (du moins aux époques t ultérieures à l'instant initial considéré), l'expérience vient confirmer et compléter la vue théorique précédente, en donnant des températures effectives qui vérifient toutes les équations mises ici en jeu, et qui sont néanmoins continues. Nous sommes loin encore de l'époque (si elle arrive jamais), où la Physique mathématique pourra ne faire appel à l'observation que pour poser les premiers principes de chacune de ses branches, et où elle se dispensera de baser purement et simplement sur l'expérience, dans ses démonstrations générales, le *postulatum* de la variation *graduelle* de toutes les fonctions qu'elle emploie (sauf parfois en des endroits *exceptionnels,* comme arêtes, sommets, etc., ou à des instants *exceptionnels* aussi, comme celui du commencement d'un phénomène, pour des données initiales singulières, etc.).

99. Unité de cette solution. — Si, vu la faiblesse de notre intuition, la théorie laisse subsister quelque obscurité sur le fait de

Digitized by Google

l'existence d'une fonction continue u de x, y, z, t, vérifiant l'équation indéfinie (108), avec les conditions (113) et (119), à partir de valeurs initiales arbitraires données, en revanche, elle réussit à démontrer simplement, avec toute la clarté désirable, que cette solution, supposée ainsi continue, est unique; ce qui prouve que nous n'avons omis aucune des conditions physiques essentielles du problème.

Soit, en effet, u une fonction de x, y, z, t vérifiant les équations dont il s'agit, y compris même celle d'état initial, qui exige qu'à un premier instant, ou pour une première valeur choisie de t, u prenne dans tout le corps des valeurs arbitraires données $f(x, y, z)$. Appelons u' l'excédent, sur u, de toute fonction, quelle qu'elle soit, qui les vérifie également; et F'_x, F'_y, F'_z, F'_n, $F'_{n'}$ ce que deviennent les fonctions linéaires F_x, F_y, F_z, F_n, $F_{n'}$ des $\frac{du}{d(x, y, z)}$, quand on y remplace u par u'. On voit que nous désignons indifféremment par u la température des deux côtés d'une surface de séparation où l'on aurait à appliquer les conditions de raccordement (119), quoique l'expression en soit différente dans les deux milieux contigus; car il ne résultera de cette communauté de désignation aucune confusion dans la démonstration suivante, où assez d'autres indices feront toujours connaître de quelle fonction on parlera. Nous avons à prouver que l'on aura identiquement $u' = 0$.

La substitution de $u + u'$ à u, dans nos diverses équations, changera respectivement F_x, F_y, F_z, F_n, $F_{n'}$ en $F_x + F'_x$, $F_y + F'_y$, $F_z + F'_z$, $F_n + F'_n$, $F_{n'} + F'_{n'}$, et aussi $\varphi(x, y, z, t, u)$, $\psi(x, y, z, t, u)$, en $\varphi(x, y, z, t, u) - Lu'$, $\psi(x, y, z, t, u) - ku'$, si nous appelons L et k les rapports *finis*

$$(120)\qquad \begin{cases} L = \dfrac{\varphi(x, y, z, t, u) - \varphi(x, y, z, t, u + u')}{u'}, \\[2ex] k = \dfrac{\psi(x, y, z, t, u) - \psi(x, y, z, t, u + u')}{u'}, \end{cases}$$

essentiellement positifs, à cause de ce fait que les fonctions φ et ψ varient en sens inverse de leur dernière variable. Alors les équations (108), (113), (119), simplifiées par la suppression des termes où ne figurera pas u', et qui les vérifient séparément,

Digitized by Google

deviendront

$$(121)\qquad C\frac{du'}{dt} = \frac{dF'_x}{dx} + \frac{dF'_y}{dy} + \frac{dF'_z}{dz} - Lu',$$

$$(122)\qquad \text{(à la surface limite) } F'_n = -ku',$$

$$(123)\qquad \text{(à une surface séparative) } u' = u' \text{ des deux côtés, } F'_n + F'_{n'} = 0.$$

Enfin, à l'instant initial, la fonction u', différence de deux solutions alors égales, s'annule.

Multiplions l'équation indéfinie (121) par u', puis par l'élément de volume $d\varpi$ comprenant le point (x, y, z); et intégrons les résultats dans toute l'étendue ϖ du système, après avoir dédoublé les trois produits $u'\dfrac{d(F'_x, F'_y, F'_z)}{d(x, y, z)}$ en

$$\frac{d.u'(F'_x, F'_y, F'_z)}{d(x, y, z)} - (F'_x, F'_y, F'_z)\frac{du'}{d(x, y, z)}.$$

Nous réduirons à des intégrales de surface les premiers termes résultant de ces dédoublements, si nous les traitons par la formule de calcul intégral qui nous a servi, dans la Leçon précédente (p. 168), à convertir, au contraire, en intégrales de volume trois termes analogues, qui exprimaient des intégrales de surface. A la limite de chacun, en particulier, des corps du système, ces trois termes, intégrés seulement pour l'intérieur du corps en question, donneront, en tout, $d\sigma$ désignant un élément de cette limite,

$$(124)\qquad \int u'(F'_x\cos\alpha + F'_y\cos\beta + F'_z\cos\gamma)\,d\sigma, \quad \text{ou} \quad \int u'F'_n\,d\sigma.$$

Quand, ensuite, on ajoutera les résultats concernant les divers corps du système, il y aura, pour chaque élément $d\sigma$ des surfaces séparatives, deux éléments d'intégrale, provenant des deux corps contigus, où le facteur u' sera commun en vertu de la première condition (123), et qui auront la somme $u'(F'_n + F'_{n'})d\sigma$, nulle en vertu de la seconde condition (123). Seuls, les éléments $u'F'_n\,d\sigma$ relatifs à la surface limite générale subsisteront, et, en appelant $\int_\sigma$ une intégrale prise seulement sur cette surface, leur somme sera $\int_\sigma u'F'_n\,d\sigma$, ou bien, vu (122),

$$(125)\qquad -\int_\sigma ku'^2\,d\sigma.$$

Digitized by Google

Comme, d'ailleurs, le premier terme de (121), multiplié par $u'd\varpi$ et intégré dans tout le volume ϖ du système, donne évidemment $\frac{d}{dt}\int_\varpi C\frac{u'^2}{2}d\varpi$, que, d'autre part, sous le signe $\int_\varpi$ subsistant au second membre, figurera l'expression $F'_x\frac{du'}{dx}+F'_y\frac{du'}{dy}+F'_z\frac{du'}{dz}$, égale au polynome $2\Phi'$, homogène du second degré en $\frac{du'}{d(x,y,z)}$ et *essentiellement positif,* qui se déduit de 2Φ (p. 117) par la substitution de u' à u, il viendra, en définitive,

$$(126)\qquad \frac{d}{dt}\int_\varpi C\frac{u'^2}{2}d\varpi=-\int_\varpi 2\Phi' d\varpi-\int_\varpi Lu'^2 d\varpi-\int_\sigma ku'^2 d\sigma.$$

Le second membre est composé d'éléments tous négatifs, à moins qu'ils ne soient nuls. Donc l'intégrale figurant au premier membre, $\int_\varpi C\frac{u'^2}{2}d\varpi$, n'a jamais sa dérivée en t positive, et elle décroît, ou bien reste constante, à mesure que le temps grandit. Or cette intégrale est nulle à l'instant initial du phénomène, alors que $u'=0$ dans tout le système. Donc, ne pouvant devenir négative puisque tous ses éléments sont des carrés, elle est nulle aussi à toutes les époques *t ultérieures,* et ne cesse pas d'avoir ses éléments identiquement nuls; ce qui exige que l'on ait *désormais,* dans tout le système, $u'=0$.

100. Problème particulier du refroidissement. — Les équations aux dérivées partielles régissant la température u se réduisent à la forme des précédentes (121), (122), (123) en u', quand, d'une part, la température extérieure u_e est à la fois uniforme et invariable, et que, d'autre part, le corps ne possède aucune source calorifique ni intérieure S, ni superficielle S_1, hypothèse annulant les fonctions S, S_1 et Δ dans (108), (113) et (119). Alors, si l'on choisit comme zéro du thermomètre la température extérieure, qui sera supposée être aussi, dans le cas d'un système diathermane, celle de l'éther en tous les points (x, y, z), la condition (113), à la surface limite où ψ s'annulera avec u, sera simplement $F_n=-ku$, k désignant le quotient *positif* et *fini* de F_n par $-u$; et, d'autre part, la chaleur prise à l'éther par l'unité des volumes diathermanes, s'annulant aussi avec u, pourra s'écrire $-Lu$, si L dé-

Digitized by Google

signe de même le quotient fini, essentiellement positif, de φ par $-u$. Les équations (108), (113), (119) seront donc précisément ce que deviennent (121), (122), (123) quand on y supprime les accents.

On en déduira donc la relation que donne (126) par la même suppression, savoir

$$(127) \qquad \frac{d}{dt}\int_{\varpi} C\frac{u^2}{2}\,d\varpi = -\int_{\varpi} 2\Phi\,d\varpi - \int_{\varpi} Lu^2\,d\varpi - \int_{\sigma} ku^2\,d\sigma.$$

Si l'on a divisé préalablement le système en fragments élémentaires $d\varpi$ d'égale capacité calorifique $Cd\varpi$, l'intégrale paraissant au premier membre représentera, à un facteur constant près, la valeur *moyenne,* pour tous les fragments, du carré de l'écart u entre la température de chacun et la température extérieure zéro.

L'équation (127) exige donc que cette valeur moyenne décroisse sans cesse, et avec une rapidité notable, tant qu'un au moins des trois termes du second membre différera sensiblement de zéro. Or, c'est ce qui arrivera pour le premier, $-\int_{\varpi} 2\Phi\,d\varpi$, tant que, dans quelque partie finie du système, le polynome 2Φ aura une ou plusieurs de ses trois variables $\frac{du}{d(x,y,z)}$ de grandeur appréciable, c'est-à-dire tant qu'il subsistera des inégalités de température dans l'intérieur. Ainsi, le carré moyen de l'écart u décroîtra jusqu'à égalisation de la température dans tout corps du système.

Quant aux deuxième et troisième termes du second membre de (127), ils n'approchent de zéro qu'autant que les écarts u soit à l'intérieur, soit à la surface, en approchent eux-mêmes, à moins que le rapport L ou le rapport k mesurant, l'un la diathermanéité, l'autre la conductibilité extérieure, ne soient respectivement nuls. Il faut donc, tout à la fois, un système entièrement athermane et une surface limite imperméable sur toute son étendue, pour que le carré moyen de l'écart u cesse de décroître sensiblement avant d'être presque nul, ou pour qu'il y ait nivellement des températures seulement dans chaque corps et non avec l'extérieur. Donc, en général, ce double équilibre se produira en même temps et *asymptotiquement,* en abaissant jusqu'à zéro le carré

Digitized by Google

moyen de l'écart u; ce qui fera tendre toutes les températures du système vers la température extérieure zéro.

Ce problème des températures successives d'un système dépourvu de sources calorifiques, et entouré d'un milieu à température uniforme invariable, s'appelle, en général, le *problème du refroidissement* des corps, parce que, pour fixer les idées, on s'en représente les températures initialement supérieures à celle du milieu environnant, et qu'alors le phénomène se réduit à leur abaissement graduel, ou à la dissipation incessante, dans le milieu, de l'excès de chaleur que contenait primitivement le système. Les valeurs de u changeraient simplement de signe, dans le cas contraire où le système serait initialement plus froid que le milieu ambiant et lui prendrait sa chaleur pour se mettre à son niveau thermique.

Observons que, si, à partir de l'instant, dit *initial,* où la température est une fonction donnée de x, y, z, on remonte vers le passé, en admettant que les mêmes équations aux dérivées partielles fussent dès lors applicables, la formule (127), où diminuera le temps t, assignera au carré moyen de l'écart u des valeurs de plus en plus grandes, et à u, par suite, des valeurs en général de plus en plus inégales qui, accroissant à la fois les trois intégrales du second membre, exagéreront encore la rapidité de variation du carré u^2 moyen. On conçoit qu'alors ces inégalités, surtout si elles se produisent de préférence en certaines régions, y aboutissent à des températures énormes, impossibles physiquement, ou même analytiquement à partir du moment où elles seraient infinies (car nos formules supposent la continuité). Et *le refroidissement aura eu forcément un début,* avant lequel le système s'était trouvé soustrait, ou momentanément, ou d'une manière continue, aux conditions qui y règnent depuis.

Les phénomènes de chaleur, régis par une équation du premier ordre en t qu'altère le changement de dt en $-dt$, diffèrent donc beaucoup, à cet égard, de ceux de mouvement offerts par un système fini, dont les équations, *du moins dans les corps élastiques,* ne contiennent pas de dérivée d'ordre impair par rapport au temps t. On peut y changer dt en $-dt$ sans modifier les équations; et le retour vers le passé y est soumis aux mêmes lois que la marche vers l'avenir, contrairement à ce qui aurait lieu si les

Digitized by Google

vitesses, par exemple, figuraient dans les équations du mouvement comme y figurent les accélérations.

101. Existence d'un état permanent, ou de températures stationnaires possibles, quand les températures extérieures sont invariables et les sources de chaleur constantes. — Le cas le plus simple, après celui d'un système dépourvu de sources de chaleur et plongé dans un milieu à température uniforme invariable, est celui d'un système où les sources de chaleur ont un débit constant et où les températures extérieures u_e sont également indépendantes du temps. Autrement dit, la variable t ne figure pas explicitement dans les fonctions données u_e, φ, ψ, S, S_1, Δ des formules (108), (113), (117), (119). Alors le phénomène qu'offrent les températures successives du système est évidemment de ceux qui se produisent dans des conditions constantes, *permanentes;* et l'on sait, par une loi physique générale [1], qu'il tend lui-même vers la *permanence* ou, comme on dit, qu'il arrive toujours très sensiblement *à se régler,* les températures y devenant partout *stationnaires*. Si nous appelons U la fonction de x, y, z exprimant ces températures finales, ou mieux définitives (je veux dire qui, *une fois réalisées,* persistent), U vérifiera l'équation (108), prise avec premier membre $C\frac{du}{dt}$ nul, et, en outre, les conditions adjointes, (113) à (119), convenant au système donné.

L'expérience montre, comme on voit, que ce système d'équations en U admet une solution. C'est ce qu'on peut entrevoir également par l'analyse, en raisonnant presque comme dans le cas de l'état variable (p. 180). En d'autres termes, et supposant pour plus de simplicité les équations linéaires en U, c'est-à-dire L et k indépendants de U, imaginons que l'on choisisse, dans chaque corps du système, des points (x, y, z), en assez grand nombre et assez rapprochés, soit sur sa surface, soit à son intérieur, soit même sur une surface enveloppante très voisine de sa surface limite et comprise dans la couche superficielle, pour que les dérivées partielles secondes et premières de U en x, y, z s'expriment, avec une

---

[1] Voir mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique,* t. II, 1er fascicule, p. 221 à 227.

Digitized by Google

grande approximation, au moyen des différences entre la valeur de U, en celui de ces points qui est le plus proche de l'endroit considéré (x, y, z), et ses valeurs aux points qui l'entourent. Alors ces dérivées secondes et premières de U deviendront des fonctions linéaires desdites différences; et, en appliquant l'équation (108), débarrassée du terme de son premier membre, à tous les points marqués du corps intérieurs ou superficiels, on aura autant d'équations du premier degré qu'il y aura de ces points, entre les valeurs de U relatives non seulement aux points en question, mais aussi aux points de la surface enveloppante, pris en même nombre que les points superficiels du corps. Or on a vu, au n° 98 (p. 180), comment ces valeurs de U surabondantes seront *linéairement* reliées aux valeurs effectives ou réelles existant sur la surface, par le moyen des conditions adjointes, supposées linéaires aussi, où figurent soit F_n, soit U à la superficie, conditions réduites à une seule sur la surface limite de tout le système, mais au nombre de deux sur les surfaces séparatives, où il y a deux fonctions U et deux flux F_n, $F_{n'}$. En somme, les équations posées équivaudront à un système d'équations du premier degré, en même nombre immense que leurs inconnues, qui seront les valeurs de U en tous les points choisis soit des corps considérés, soit de leurs surfaces limites ou séparatives, après élimination des F_n et $F_{n'}$. L'on conçoit qu'un pareil système admette une solution, et une seule.

Quant à la variation graduelle, avec la situation (x, y, z), des valeurs de U ainsi définies, il faudrait évidemment plus qu'un aperçu rapide pour la démontrer; et le plus simple est encore d'y faire appel au principe physique de la continuité, *dans l'espace* (non moins que *dans le temps*), qui domine toute la Philosophie naturelle [1].

---

[1] Dans le cas où les flux de chaleur ont un potentiel Φ et où la fonction φ admet l'expression linéaire $S + L(u_e - U)$, la fonction U d'état permanent a la propriété de rendre minima la somme

$$\int_\varpi \left[\Phi + \frac{L}{2}(u_e - U)^2 + S(u_e - U)\right] d\varpi$$
$$+ \int_\sigma \left[\frac{k}{2}(u_e - U)^2 + S_1(u_e - U)\right] d\sigma + \int_{\sigma'} S_1\left(u_e - \frac{U + U'}{2}\right) d\sigma',$$

$\int_\sigma$, $\int_{\sigma'}$ étant deux intégrales relatives à la surface limite σ et à celle, σ', des

Digitized by Google

102. Unité de la solution du problème des températures stationnaires. — L'analyse permet de démontrer aisément l'unité de la solution, comme dans le cas des températures variables.

A cet effet, et pour ne pas compliquer, désignons encore la température par u, quoique maintenant elle soit indépendante de t et que, par suite, le premier membre de (108) s'annule. Tous les raisonnements du n° 99 s'appliqueront, sans changement; et l'on aura, pour régir la différence u' de deux solutions, l'équation qui se déduit de (126) par la suppression du premier terme, identiquement nul ici. Il vient donc

$$0 = -\int_{\varpi} 2\Phi' \, d\varpi - \int_{\varpi} \mathrm{L} u'^2 \, d\varpi - \int_{\sigma} k u'^2 \, d\sigma,$$

relation exigeant, tout à la fois

$$(128) \qquad (\text{à l'intérieur})\ \Phi' = 0, \qquad \mathrm{L} u'^2 = 0,$$

$$(129) \qquad (\text{à la surface})\ k u'^2 = 0.$$

La première de ces conditions implique évidemment l'annulation partout des trois variables $\frac{du'}{d(x, y, z)}$ de la fonction Φ', c'est-à-dire la réduction, à une simple constante, de la différence u' des deux solutions. La seconde (128) et la relation (129) impliquent à leur tour l'annulation de cette constante, à moins qu'on n'ait $\mathrm{L} = 0$ dans tout l'intérieur et $k = 0$ sur toute la surface limite, c'est-

---

raccordements, sur lesquelles sont censées vérifiées respectivement les relations (117), (119); et comme on reconnaît assez aisément que cette intégrale a un minimum, vu que les termes linéaires en $u_e - \mathrm{U}$, ou en $u_e - \frac{\mathrm{U} + \mathrm{U}'}{2}$, y sont effacés, pour les grandes valeurs absolues de U, par ceux du second degré, savoir, par les termes en Φ ou en $(u_e - \mathrm{U})^2$, essentiellement positifs, on peut en déduire l'existence de la fonction U qui réalise ce minimum. Mais il faut encore admettre que la fonction cherchée U offre les conditions de continuité nécessaires pour l'application du calcul des variations.

La démonstration de cette propriété de minimum est, identiquement, celle que contiennent, pour le cas d'un corps isotrope et homogène, athermane et dépourvu de sources de chaleur, les nos 499* et 500* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, fascicule II, p. 574* à 580*) : le potentiel Φ, dans ce cas particulièrement intéressant, se trouve proportionnel à $\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathrm{U}^2}{dx^2} + \frac{d\mathrm{U}^2}{dy^2} + \frac{d\mathrm{U}^2}{dz^2}\right)$.

Digitized by Google

à-dire l'athermanéité complète du système et l'imperméabilité totale de sa surface limite.

Dans ce cas exceptionnel, il est clair que, les équations (108), (117), (119) du problème contenant seulement des dérivées ou des différences de valeurs de u, l'addition d'une constante arbitraire à toutes ces valeurs sera permise. On la déterminerait en se donnant soit la température permanente U en un point particulier, soit plutôt la température moyenne du système, ou, ce qui revient au même, la chaleur totale $\int_{\varpi} CU\,d\varpi$ qu'il contient en plus de celle qui y annulerait partout la température.

Les équations du premier degré, en nombre immense, constituant le système auquel équivaut l'ensemble des équations (108), (117), (119), ne sont donc pas alors tout à fait distinctes; et l'une d'elles résulte des autres. En effet, si l'on multiple (108) par $d\varpi$ et qu'on fasse la somme des équations ainsi obtenues pour tout l'ensemble donné de corps, ce qui constitue la combinaison linéaire la plus simple des équations en question, savoir, celle d'où l'on est parti au n° 87 (p. 165) et qui est la formule (107), il vient ici, vu $\frac{du}{dt} = 0$, $L = 0$ et $k = 0$,

$$0 = \int_{\sigma} S_1\,d\sigma + \int_{\varpi} S\,d\varpi. \tag{130}$$

Cette relation entre les *données* S_1 et S relatives aux sources ou superficielles, ou intérieures, était évidente; car elle signifie que, dans le système athermane et à surface imperméable, parvenu ainsi à l'état permanent, le débit total $\int_{\sigma} S_1\,d\sigma + \int_{\varpi} S\,d\varpi$ des sources par unité de temps est nul, les unes absorbant précisément autant de chaleur que les autres en donnent. Il est bien clair que, sans cette relation entre les données, l'état permanent ne pourrait s'établir; et les équations seraient incompatibles. Mais avec cette relation il devient indéterminé, puisque la combinaison linéaire que nous avons formée, des équations du problème, se trouve, alors, identiquement satisfaite; et c'est ce qu'indique l'introduction d'une constante arbitraire commune dans les valeurs de U.

Digitized by Google

103. Tendance effective et asymptotique des températures réelles vers leurs valeurs permanentes. — Il est aisé maintenant de démontrer qu'à partir d'un état initial arbitraire, le système tend vers l'état permanent unique défini ci-dessus, où les températures ont été désignées par U. Pour abréger, appelons u' l'excédent $u - U$ des températures vraies à l'époque t sur les températures permanentes, ou posons

$$u = U + u'. \tag{131}$$

Nous substituerons donc $U + u'$ à u dans les équations (108), (117), (119), où nous admettrons pour φ l'expression linéaire

$$\varphi = S + L(u_e - u); \tag{132}$$

et nous accentuerons encore la lettre F désignant les flux, quand u' y remplacera u. Cela posé, la suppression des termes où ne figure pas u', et qui vérifient séparément les équations, donnera précisément, en u', les relations (121), (122), (123). Or ce sont celles qui régissent le simple refroidissement du système, quand on y supprime les sources de chaleur et les inégalités de la température extérieure u_e. Seulement, u' désignant maintenant la différence $u - U$, ses valeurs initiales ne seront pas celles, $f(x, y, z)$, de u, mais auront la formule $f(x, y, z) - U$.

Ainsi, le calcul de la partie variable u' des températures rentre entièrement dans le problème du refroidissement; et cette partie, régie par l'équation (127), tend sans cesse vers zéro. Au bout d'un temps assez long, on aura donc très sensiblement $u = U$; et l'état permanent sera établi.

Le cas particulier le plus intéressant est celui du *simple échauffement* du système, qui a lieu quand les températures initiales étaient nulles, ou quand $f(x, y, z) = 0$. Il faudra donc y poser

$$(\text{dans l'état initial})\ u = 0 \quad \text{ou} \quad u' = -U.$$

En résumé, quand les températures extérieures sont invariables et les sources de chaleur constantes, le problème général de la variation des températures u d'un système donné se ramène à deux problèmes plus simples, celui du refroidissement et celui des températures stationnaires. Nous verrons dans la prochaine Leçon comment cette remarque se généralise, pour s'appliquer au

Digitized by Google

cas de températures extérieures variables et de sources également variables, et comment, par suite, les *problèmes du refroidissement simple et des températures stationnaires* constituent les *deux questions fondamentales* de la théorie analytique de la chaleur.

104. Équation indéfinie des températures dans un corps homogène : cas d'un corps isotrope. — Terminons la leçon présente en étudiant la forme que prend l'équation (108) dans un milieu homogène, ou, du moins, à conductibilités intérieures pareilles dans toute son étendue. Et, d'abord, s'il est en même temps isotrope, ou qu'on ait

$$F_x = K\frac{du}{dx}, \qquad F_y = K\frac{du}{dy}, \qquad F_z = K\frac{du}{dz},$$

il vient simplement

$$(133) \qquad C\frac{du}{dt} = K\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + \varphi(x, y, z, t, u).$$

Supposons le corps athermane et dépourvu de sources intérieures de chaleur, ou φ nul; et cette équation sera celle de Fourier. Alors *la température u a sa vitesse $\frac{du}{dt}$ d'accroissement sur place simplement proportionnelle à son paramètre différentiel du second ordre* $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}$, que Lamé désigne par $\Delta_2 u$ (¹).

105. Cas d'un corps hétérotrope. — S'il s'agit maintenant d'un corps hétérotrope, mais toujours homogène quant aux conductibilités intérieures, c'est-à-dire ayant ses deux ellipsoïdes principal et des conductibilités respectivement égaux et orientés de même dans toute son étendue, nous supposerons les x, y, z dirigés suivant les axes de l'ellipsoïde principal; en sorte que les trois flux F_x, F_y, F_z admettent les formules (57) (p. 130), mais où nous conserverons nos lettres minuscules x, y, z, au lieu des

(¹) *Voir*, au sujet de ce paramètre différentiel Δ_2, qui constitue la dérivée la plus naturelle des fonctions de point, les nos 59* et 60* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. I, fascicule II, p. 70* à 72*).

Digitized by Google

capitales X, Y, Z. L'équation (108) deviendra immédiatement

$$(134)\qquad C\frac{du}{dt} = a^2\frac{d^2u}{dx^2} + b^2\frac{d^2u}{dy^2} + c^2\frac{d^2u}{dz^2} + \varphi(x, y, z, t, u).$$

Remplaçons-y les coordonnées x, y, z par les nouvelles variables ξ, η, ζ que définissent les relations simples

$$(135)\qquad \xi = \frac{x}{a}, \qquad \eta = \frac{y}{b}, \qquad \zeta = \frac{z}{c},$$

donnant, pour transformer les dérivées des fonctions de point, les formules symboliques évidentes

$$(136)\qquad \frac{d}{dx} = \frac{1}{a}\frac{d}{d\xi}, \qquad \frac{d}{dy} = \frac{1}{b}\frac{d}{d\eta}, \qquad \frac{d}{dz} = \frac{1}{c}\frac{d}{d\zeta};$$

et l'équation (134) deviendra

$$(137)\qquad C\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{d^2u}{d\eta^2} + \frac{d^2u}{d\zeta^2} + \varphi(a\xi, b\eta, c\zeta, t, u).$$

Elle prend ainsi la forme de l'équation des températures dans un corps isotrope de conductibilité 1, dont des coordonnées rectangulaires seraient précisément les nouvelles variables ξ, η, ζ. Donc, abstraction faite des conditions aux surfaces limite ou séparatives, le problème de la variation des températures, dans les corps homogènes (quant aux conductibilités intérieures), se ramène au cas des corps isotropes.

106. Équation des températures, quand on rapporte le corps à des diamètres conjugués de son ellipsoïde principal. — Voyons maintenant ce que deviendrait l'équation (134), si le corps était rapporté à un système de coordonnées x', y', z' dirigées suivant trois demi-diamètres conjugués quelconques a', b', c' de l'ellipsoïde principal, construit autour de l'origine comme centre,

$$(138)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

On sait qu'alors les coordonnées rectangles x, y, z d'un point quelconque de l'espace sont des fonctions linéaires et homogènes de ses coordonnées obliques x', y', z', et que ces fonctions ont

Digitized by Google

précisément les coefficients qu'il faut pour donner identiquement

$$(139)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}.$$

Si nous introduisons non seulement les variables ξ, η, ζ du numéro précédent (formules 135), mais encore celles-ci, analogues,

$$(140)\qquad \xi'=\frac{x'}{a'},\qquad \eta'=\frac{y'}{b'},\qquad \zeta'=\frac{z'}{c'},$$

il est clair, d'une part, que ξ, η, ζ, fonctions linéaires et homogènes de x, y, z, seront également des fonctions linéaires et homogènes de x', y', z' et, par suite, de ξ', η', ζ', ou pourront s'écrire

$$(141)\quad \xi=l\xi'+l'\eta'+l''\zeta',\quad \eta=m\xi'+m'\eta'+m''\zeta',\quad \zeta=n\xi'+n'\eta'+n''\zeta',$$

d'autre part, que leurs expressions (141) donneront identiquement, en vertu de (139),

$$(142)\qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2.$$

Or cela exige entre les neuf coefficients l, l', l'', ..., n'', les six relations évidentes

$$(143)\quad \begin{cases} l^2+m^2+n^2=1, & l'^2+m'^2+n'^2=1, & l''^2+m''^2+n''^2=1,\\ l'l''+m'm''+n'n''=0, & l''l+m''m+n''n=0, & ll'+mm'+nn'=0.\end{cases}$$

Celles-ci expriment d'ailleurs, respectivement, que, dans un espace où ξ, η, ζ désigneraient des coordonnées rectangulaires, (l, m, n), (l', m', n'), (l'', m'', n'') seraient les cosinus directeurs de trois certaines droites émanées de l'origine, et que ces droites seraient deux à deux rectangulaires. Bref, ces droites constitueraient, dans le même espace, de nouveaux axes rectangulaires, des ξ', η', ζ', par rapport auxquels le point quelconque (ξ, η, ζ) aurait des coordonnées ξ', η', ζ' vérifiant justement les relations (141). Or ces relations (141), respectivement multipliées ou par l, m, n, ou par l', m', n', ou par l'', m'', n'', et ajoutées, donnent, vu (143), les formules inverses

$$(144)\quad \xi'=l\xi+m\eta+n\zeta,\quad \eta'=l'\xi+m'\eta+n'\zeta,\quad \zeta'=l''\xi+m''\eta+n''\zeta;$$

et celles-ci, elles-mêmes, permettent d'exprimer immédiatement, en fonction de ξ', η', ζ', les dérivées en ξ, η, ζ des fonctions de point, supposées devenues fonctions de ξ', η', ζ' et, dès lors, fonc-

Digitized by Google

tions composées de ξ, η, ζ. On obtient ainsi les formules symboliques évidentes

$$(145)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} &= l\,\frac{d}{d\xi'} + l'\,\frac{d}{d\eta'} + l''\,\frac{d}{d\zeta'},\\ \frac{d}{d\eta} &= m\,\frac{d}{d\xi'} + m'\,\frac{d}{d\eta'} + m''\,\frac{d}{d\zeta'},\\ \frac{d}{d\zeta} &= n\,\frac{d}{d\xi'} + n'\,\frac{d}{d\eta'} + n''\,\frac{d}{d\zeta'}, \end{aligned}\right.$$

affectées respectivement des mêmes coefficients constants que (141). Les dérivées de u en ξ, η, ζ se transformeront, par suite, exactement comme les coordonnées mêmes ξ, η, ζ; et l'on aura, par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\xi^2} &= \left(l\,\frac{d}{d\xi'} + l'\,\frac{d}{d\eta'} + l''\,\frac{d}{d\zeta'}\right)\left(l\,\frac{d}{d\xi'} + l'\,\frac{d}{d\eta'} + l''\,\frac{d}{d\zeta'}\right)u\\ &= l^2\frac{d^2u}{d\xi'^2} + l'^2\frac{d^2u}{d\eta'^2} + l''^2\frac{d^2u}{d\zeta'^2} + 2l'l''\frac{d^2u}{d\eta'\,d\zeta'} + 2l''l\frac{d^2u}{d\zeta'\,d\xi'} + 2ll'\frac{d^2u}{d\xi'\,d\eta'}, \end{aligned}$$

exactement comme la première formule (141) donne

$$\begin{aligned} \xi^2 &= (l\xi' + l'\eta' + l''\zeta')(l\xi' + l'\eta' + l''\zeta')\\ &= l^2\xi'^2 + l'^2\eta'^2 + l''^2\zeta'^2 + 2l'l''\eta'\zeta' + 2l''l\zeta'\xi' + 2ll'\xi'\eta'. \end{aligned}$$

En conséquence, de même que le trinome $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ se transforme identiquement en $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$, de même aussi l'expression $\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{d^2u}{d\eta^2} + \frac{d^2u}{d\zeta^2}$ se transforme en $\frac{d^2u}{d\xi'^2} + \frac{d^2u}{d\eta'^2} + \frac{d^2u}{d\zeta'^2}$.

Alors il ne restera plus qu'à introduire, grâce aux formules (140), les coordonnées obliques x', y', z' au lieu des variables ξ', η', ζ', ou à faire l'inverse de la transformation qui a déduit (137) de (134), avec lettres x, y, z, ξ, η, ζ, a, b, c accentuées, pour avoir en tout, identiquement,

$$(146)\qquad \left\{\begin{aligned} a^2\frac{d^2u}{dx^2} + b^2\frac{d^2u}{dy^2} + c^2\frac{d^2u}{dz^2} &= \frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{d^2u}{d\eta^2} + \frac{d^2u}{d\zeta^2}\\ &= \frac{d^2u}{d\xi'^2} + \frac{d^2u}{d\eta'^2} + \frac{d^2u}{d\zeta'^2} = a'^2\frac{d^2u}{dx'^2} + b'^2\frac{d^2u}{dy'^2} + c'^2\frac{d^2u}{dz'^2}. \end{aligned}\right.$$

Donc l'équation (134) des températures sera, en coordonnées obliques x', y', z',

$$(147)\qquad C\frac{du}{dt} = a'^2\frac{d^2u}{dx'^2} + b'^2\frac{d^2u}{dy'^2} + c'^2\frac{d^2u}{dz'^2} + \varphi.$$

Digitized by Google

Les demi-diamètres conjugués a', b', c' de l'ellipsoïde principal ont donc *la propriété de fournir des axes coordonnés obliques, conservant à l'équation indéfinie des températures la forme simple que lui donnent les coordonnées rectangles dirigées suivant ses axes, avec coefficients respectifs égaux aux carrés de ces demi-diamètres conjugués.*

Telle est la belle propriété, découverte par Lamé, qui a fait connaître l'ellipsoïde principal, en a signalé l'importance et lui a valu son nom [1].

Pour rendre la démonstration précédente plus brève, on peut observer que l'introduction des variables ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', transformant à la fois les expressions respectives (139) en (142) et les première et dernière expressions (146) en les deux intermédiaires, transporte les raisonnements (si l'on assimile ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' à des coordonnées) dans un espace où l'ellipsoïde principal devient la sphère $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ et où la première expression (146) devient le paramètre différentiel Δ_2 de la fonction u. Or, dans une sphère, tous les diamètres conjugués sont rectangulaires. Les coordonnées ξ', η', ζ' sont donc tout aussi rectangles que les coordonnées ξ, η, ζ; et la troisième expression (146), en ξ', η', ζ', n'est pas moins le paramètre différentiel $\Delta_2 u$ que la précédente, en ξ, η, ζ. L'une et l'autre expriment donc une même quantité; d'où résulte bien, presque sans calcul, l'équivalence des quatre expressions (146).

107. Surfaces isothermes dans un milieu homogène indéfini, chauffé en un de ses points. — Une autre propriété, très simple, est bien plus propre que la précédente à donner de l'ellipsoïde principal une véritable définition physique.

Imaginons que l'on chauffe un corps massif homogène en un point intérieur pris pour origine des coordonnées, en y déversant directement et successivement dans un très petit espace des quantités connues de chaleur. Il suffit, pour exprimer ces cir-

---

[1] Toutefois, cet ellipsoïde s'était déjà offert à Duhamel, dans le cas particulier des corps athermanes symétriques, comme représentant les surfaces isothermes qui s'y forment autour d'un point chauffé. (*Voir* plus loin, au t. II, la XXVIIe Leçon.)

Digitized by Google

constances, de concevoir la fonction φ de la forme $S + L(u_e - u)$, avec S différent de zéro seulement dans une très petite étendue autour de l'origine, et L $(u_e - u)$ fonction donnée de u et de t, mais non, explicitement, de x, y, z. On suppose, d'ailleurs, nulle partout la température initiale, et assez éloignées les limites du corps, pour que la condition propre à la surface revienne à dire que u s'annule sensiblement aux grandes distances de l'origine, ou tend vers zéro pour x, y, z infinis.

Dans ces deux relations et dans l'équation indéfinie introduisons les variables précédentes ξ, η, ζ : l'équation indéfinie deviendra (137), où φ ne dépendra explicitement de ξ, η, ζ que pour ξ, η, ζ très petits ; et les conditions adjointes seront, d'une part, $u = 0$ à l'époque initiale, d'autre part u infiniment petit pour les valeurs infinies du radical $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

Or, si l'on considère ξ, η, ζ comme des coordonnées rectangulaires, dans l'espace où serait un corps *isotrope* de conductibilité 1 et de capacité calorifique C, ces relations exprimeront que ce corps isotrope a eu sa température initialement nulle partout, qu'il l'a encore nulle et l'aura indéfiniment aux distances infinies de l'origine, et qu'il est chauffé par une source de chaleur concentrée autour de l'origine, tout en pouvant recevoir ou rayonner partout ailleurs de la chaleur, mais en fonction seulement de la température u elle-même et du temps t. Il semble physiquement évident que tous les points également distants de l'origine se trouvent alors dans des conditions équivalentes ; et l'on peut admettre, sauf à revenir plus loin, théoriquement, là-dessus [1], qu'ils auront même température. La fonction u ne dépendra donc des coordonnées ξ, η, ζ qu'en tant que celles-ci influeront sur la distance $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ à l'origine ; et, en désignant par F une certaine fonction de deux variables seulement, l'intégrale du problème sera de la forme

$$(148) \qquad u = F(t, \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}) = F\left(t, \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}\right).$$

A chaque époque t, le lieu des points où u a une même valeur

---

[1] *Voir*, à ce sujet, dans le t. II, la XXXe Leçon.

Digitized by Google

quelconque s'obtient en égalant à un paramètre constant l'expression $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, c'est-à-dire en posant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \text{const.} \tag{149}$$

Les surfaces isothermes du milieu indéfini sont donc *des ellipsoïdes décrits autour du point chauffé comme centre et homothétiques par rapport à l'ellipsoïde principal.*

On voit par là que le rôle dominant, dans la propagation de la chaleur au sein d'un milieu indéfini en tous sens, appartiendra à l'ellipsoïde principal, tandis qu'il revient à l'ellipsoïde des conductibilités dans les barres et les plaques, où les points et courbes isothermes autour d'une source de chaleur sont fournis par celui-ci [1].

[1] *Voir*, au t. II, la XXXIIe Leçon.

Digitized by Google

TREIZIÈME LEÇON.

RÉDUCTION DU PROBLÈME GÉNÉRAL DE L'ÉCHAUFFEMENT AUX DEUX QUESTIONS DU REFROIDISSEMENT SIMPLE ET DES TEMPÉRATURES STATIONNAIRES; CAS PARTICULIER D'UN ÉCHAUFFEMENT PÉRIODIQUE.

108. Sur la réduction du problème général de l'échauffement. — Nous avons vu, dans la dernière Leçon, qu'étant donné un système de corps pourvu de sources calorifiques à débit constant et soumis à des températures extérieures invariables, le problème de son échauffement se dédoublait de lui-même en deux questions relativement simples, l'une, d'état variable, l'autre, d'état permanent. Ce sont, d'une part, la question de son refroidissement, quand on le suppose, après un échauffement initial arbitraire, privé désormais de toute source de chaleur et soumis à des températures extérieures nulles, d'autre part, la question de son équilibre calorifique ou plutôt de ses *températures stationnaires*, c'est-à-dire de la manière dont la température doit se trouver réglée en ses divers points, pour s'y conserver sans cesse par l'effet tant des températures extérieures données que des sources de chaleur effectivement contenues dans le système. Or la même réduction s'étend, moyennant un degré de complication de plus, au cas général où les températures extérieures u_e et les débits S, S_1 des sources calorifiques sont variables avec le temps t; car ce cas général se ramène au cas particulier de sources et de températures extérieures invariables. Nous emploierons la Leçon présente à exposer cette dernière réduction, que suivra, dans la Leçon prochaine, une de ses applications les plus intéressantes. Il sera ainsi établi que la théorie analytique de la chaleur se ramène à deux problèmes fondamentaux, celui du refroidissement simple et celui des températures stationnaires.

Nous supposerons les deux fonctions φ, ψ réduites aux formes

Digitized by Google

linéaires $S + L(u_e - u)$, $S_1 + k(u_e - u)$, avec S, S_1, et aussi Δ dans la première (119) (p. 178), données en x, y, z, t, et L, k fonctions également explicites de x, y, z, ainsi que les coefficients de conductibilité intérieure et la capacité calorifique C.

Les équations du problème seront

$$(150) \qquad C\frac{du}{dt} = \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz} + S + L(u_e - u),$$

$$(151) \qquad \text{(à la surface limite) } F_n = S_1 + k(u_e - u),$$

$$(152) \qquad \text{(aux surfaces séparatives) } u = u' + \Delta, \qquad F_n + F_{n'} = S_1.$$

109. Cas d'un échauffement élémentaire, c'est-à-dire d'un seul changement survenu dans les causes de l'échauffement considéré. — Quelque anciennes que soient les époques t pour lesquelles on veut étudier et connaître les valeurs physiques ou effectives de la température, et quelle que fût celle-ci, u, à la plus ancienne de ces époques ou dans l'état initial donné, on peut supposer qu'elle eût été produite par des débits antérieurs convenables de sources intérieures (¹) ou superficielles, avec le concours, si on veut l'y joindre, de valeurs de u_e également antérieures; ce qui permettra, en remontant à une époque suffisamment ancienne, de partir d'un état primitif où toutes les fonctions données u_e, S, S_1, Δ, et même u, se réduisaient à zéro. En choisissant ainsi nulles toutes ces quantités pour $t = -\infty$, nous pourrons regarder leurs valeurs effectives, aux époques où l'on veut les considérer, comme résultant en entier de changements survenus peu à peu dans le système ou autour de lui ; ce qui nous débarrassera de la complication qu'introduirait un état initial quelconque et amènera la solution à son maximum de simplicité et d'unité.

Alors, en particulier, les valeurs actuelles des températures extérieures u_e et des débits S, S_1, ainsi que de la fonction Δ, résulteront entièrement de leurs variations élémentaires antérieures du_e, dS, dS_1, $d\Delta$. Pour plus de clarté, nous mettrons la variable t en évidence dans ces fonctions, en les écrivant $u_e(t)$, $S(t)$, $S_1(t)$, $\Delta(t)$, mais sans oublier qu'elles dépendent aussi de x, y, z. Nous aurons donc, pour leurs dérivées en t, $u'_e(t)$, $S'(t)$, $S'_1(t)$, $\Delta'(t)$.

(¹) Elle peut toujours être censée due à une source locale *momentanée*, ayant fourni le débit total Cu par unité de volume.

Digitized by Google

Cela posé, appelons θ une quelconque des époques plus anciennes que t et $d\theta$ l'instant qui l'a séparée de l'époque voisine suivante $\theta + d\theta$. Les changements élémentaires survenus, durant l'instant $d\theta$, dans ces diverses quantités, changements qui influent sur les valeurs ultérieures de u, auront été

$$(153) \qquad u'_e(\theta)d\theta, \qquad S'(\theta)d\theta, \qquad S'_1(\theta)d\theta, \qquad \Delta'(\theta)d\theta.$$

Si ces changements élémentaires s'étaient trouvés les seuls, produits jusqu'à l'époque t pour laquelle on cherche la température u, il est clair que celle-ci, restée partout nulle jusqu'à l'instant θ, aurait cessé de l'être ensuite. Et le calcul de ses valeurs ultérieures à l'époque θ, aurait consisté à intégrer le système (150), (151), (152) à partir de valeurs initiales nulles, dans les hypothèses de u_e, S, S_1, Δ réduits partout aux valeurs respectives (153), indépendantes du temps t. Ces valeurs ayant le facteur commun $d\theta$, il y a lieu de l'introduire aussi dans u, c'est-à-dire de poser, par exemple,

$$(154) \qquad u = U\,d\theta.$$

Appelons d'ailleurs $\mathcal{F}_x$, $\mathcal{F}_y$, $\mathcal{F}_z$, $\mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_{n'}$, pour éviter toute confusion, ce que deviennent F_x, F_y, F_z, F_n, $F_{n'}$ quand on y remplace u par U : alors les équations en U, déduites de l'état initial et de (150), (151), (152), seront

$$(155) \quad (\text{pour } t < \theta) \qquad U = 0;$$

$$(156) \quad (\text{pour } t > \theta) \quad \begin{cases} C\dfrac{dU}{dt} = \dfrac{d\mathcal{F}_x}{dx} + \dfrac{d\mathcal{F}_y}{dy} + \dfrac{d\mathcal{F}_z}{dz} + S'(\theta) + L[u'_e(\theta) - U], \\ (\text{à la surface limite}) \ \mathcal{F}_n = S'_1(\theta) + k[u'_e(\theta) - U], \\ (\text{aux surf. de séparation}) \ U = U' + \Delta'(\theta), \qquad \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n'} = S'_1(\theta) \end{cases}$$

Or les équations (156) reviennent précisément à celles du n° **103** (p. 193), quand on adopte dans celles-ci l'époque $t = \theta$ pour époque initiale, avec des valeurs de u nulles partout à cette époque, ainsi que nous l'avions, du reste, indiqué (p. 193) pour le problème d'un simple échauffement. Donc le calcul de la fonction U et, par suite, des températures $u = U\,d\theta$ produites par le changement élémentaire (153), ou par ce qu'on peut appeler un *échauffement élémentaire*, rentre dans le cas, déjà traité, où, à

Digitized by Google

partir d'un instant initial choisi, sont maintenues constantes les sources calorifiques, et invariables les températures extérieures u_e. Ainsi, la fonction U, nulle pour $t < \theta$, sera connue pour $t > \theta$, si l'on a pu résoudre, pour le système proposé, les deux problèmes du refroidissement simple et des températures stationnaires. C'est ce que nous admettrons; et alors U aura explicitement la forme $U(x, y, z, t - \theta, \theta)$, sa dernière variable θ y figurant, outre la précédente $t - \theta$ qui est le temps écoulé depuis le début de l'échauffement élémentaire, à raison de ce que les données $u'_e(\theta)$, $S'(\theta)$, $S'_1(\theta)$, $\Delta'(\theta)$ de cet échauffement élémentaire dépendent, non seulement (en général) de x, y, z, mais aussi de l'époque θ à laquelle il a eu lieu.

110. Décomposition de l'échauffement effectif en échauffements élémentaires. — Comme, à l'époque t actuelle, les débits S, S_1 des sources calorifiques, les températures extérieures u_e, et les fonctions Δ sur les surfaces de séparation, sont les sommes respectives

$$\int_{-\infty}^{t} u'_e(\theta)d\theta, \quad \int_{-\infty}^{t} S'(\theta)d\theta, \quad \int_{-\infty}^{t} S'_1(\theta)d\theta, \quad \int_{-\infty}^{t} \Delta'(\theta)d\theta$$

des changements élémentaires éprouvés jusqu'alors par ces quantités, il est naturel de se demander si les températures u actuelles, effets de tous ces changements élémentaires, ne seraient pas également la somme pure et simple des températures qu'auraient données séparément, à l'époque t, tous ces changements élémentaires, températures qui, pour celui d'entre eux survenu entre les deux époques θ, $\theta + d\theta$, antérieures à l'époque t, ont l'expression $U(x, y, z, t - \theta, \theta)d\theta$. Autrement dit, il y a lieu d'essayer la formule

$$u = \int_{-\infty}^{t} U(x, y, z, t - \theta, \theta)d\theta. \tag{157}$$

Cette expression de u, en intégrale définie à limite supérieure variable, conviendra pourvu qu'elle satisfasse aux équations (150) à (152) et, en outre, à la condition d'état initial qu'on s'est donnée,

$$u = 0 \text{ (pour } t = -\infty). \tag{158}$$

Digitized by Google

On s'assure d'abord qu'elle vérifie cette dernière condition; car, aux époques θ très anciennes, on avait, par hypothèse, $u_e = 0$, $S = 0$, $S_1 = 0$, $\Delta = 0$, et, par suite, $u'_e(\theta) = 0$, $S'(\theta) = 0$. $S'_1(\theta) = 0$, $\Delta'(\theta) = 0$; d'où aussi $U(x, y, z, t - \theta, -\infty) = 0$.

Voyons maintenant si l'expression (157) de u satisfait de même à l'équation indéfinie (150). Elle se différentie évidemment, en x, y, z, sous le signe $\int$; et, par suite, les fonctions linéaires F_x, F_y, F_z de $\frac{du}{d(x, y, z)}$ sont les intégrales, encore entre les limites $-\infty$ et t, des fonctions linéaires analogues en $\frac{dU}{d(x, y, z)}$, multipliées par $d\theta$, c'est-à-dire de $\mathfrak{F}_x d\theta$, $\mathfrak{F}_y d\theta$, $\mathfrak{F}_z d\theta$. Le second membre de l'équation indéfinie (150) deviendra donc

$$(159) \qquad \int_{-\infty}^{t} \left\{ \frac{d\mathfrak{F}_x}{dx} + \frac{d\mathfrak{F}_y}{dy} + \frac{d\mathfrak{F}_z}{dz} + S'(\theta) + L[u'_e(\theta) - U] \right\} d\theta,$$

c'est-à-dire, en vertu de la première équation (156),

$$(160) \qquad \int_{-\infty}^{t} C \frac{dU}{dt} d\theta = C \int_{-\infty}^{t} \frac{dU}{dt} d\theta.$$

Or l'expression (157) de u peut se différentier *une fois* par rapport à t sous le signe $\int$; car le terme de sa dérivée en t fourni par la variation de la limite supérieure t n'est autre chose que la valeur de U à cette limite $\theta = t$, valeur nulle d'après (155). La deuxième expression (160) n'est donc autre chose que le premier membre $C \frac{du}{dt}$ de (150), rendu ainsi bien égal au second par la formule (157) de u.

Quant aux équations adjointes (151), (152), elles deviennent évidemment ce que donnent leurs analogues (156), multipliées par $d\theta$ et intégrées de $\theta = -\infty$ à $\theta = t$.

Ainsi la solution du problème général de l'échauffement est bien représentée par la formule (157), exprimant que la température u à chaque époque t résulte, par simple addition, des valeurs de u qu'aurait données pour cette époque, à partir de valeurs initiales nulles, chacun des changements élémentaires survenus antérieurement tant dans les températures extérieures que dans le débit des sources de chaleur, et desquels sont résultés, à partir

Digitized by Google

de valeurs initiales nulles également, ces températures extérieures et ces débits dans leur état actuel.

111. Cas particulier où les températures extérieures et les débits des sources de chaleur deviennent périodiques. — Il peut arriver que la température extérieure u_e, les débits S, S_1 des sources de chaleur, et les fonctions Δ propres aux surfaces séparatives, deviennent, à partir d'un certain moment, périodiques ou décomposables en parties périodiques, c'est-à-dire en parties reprenant désormais leurs valeurs antérieures chaque fois que le temps t y croît d'une *période*. Alors ces parties se développent, par la formule de Fourier, en termes respectivement proportionnels au cosinus ou au sinus d'arcs de la forme mt, cosinus ou sinus constituant les fonctions périodiques les plus simples, dont la période, que j'appellerai 2T, liée à m par la relation

$$m = \frac{\pi}{T}, \tag{161}$$

sera ou celle de la fonction développée elle-même, ou sous-multiple de celle-là [1].

Les termes tout connus S, Lu_e, S_1, ku_e, Δ des équations (150) à (152) ayant ainsi pris cette forme trigonométrique ou *pendulaire* en t, la fonction u finira elle-même par la prendre, avec une approximation d'autant plus élevée qu'il s'écoulera plus de temps. On sait, en effet, que tout phénomène dont les causes deviennent périodiques acquiert à la longue la même périodicité; et que c'est de cette manière qu'*il se règle alors*, comme il se réglerait par voie de permanence si ses causes devenaient constantes [2]. La fonction u tend donc à devenir, elle aussi, développable par la formule de Fourier, en termes de la forme

$$V \sin mt + W \cos mt, \tag{162}$$

avec les mêmes valeurs de m que dans les termes ci-dessus représentant les causes du phénomène, et avec des coefficients d'ampli-

---

(1) *Voir*, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, second fascicule, p. 160*.

(2) *Voir*, à ce sujet, le même *Cours d'Analyse*, t. II, premier fascicule, p. 223 à 227.

Digitized by Google

tude, V, W, variables en x, y, z de la manière qu'il faut pour satisfaire aux équations (150), (151) et (152) du problème. La forme de u relativement à la variable t se trouve dès lors connue ; et il est beaucoup plus aisé d'obtenir ainsi les expressions de V, W, par les équations (150) à (152), que de les déduire de la fonction U du numéro précédent.

On observera que les dérivées en x, y, z, t de fonctions comme (162) ont par rapport à t la même forme qu'elles; de sorte que les deux membres de chacune des équations (150) à (152) s'y réduiront eux-mêmes, ou, plutôt, deviendront des sommes d'expressions ayant cette forme. Il faudra alors égaler séparément, dans les deux membres de chacune, les termes de même période, c'est-à-dire ceux où figurera le même paramètre m dans l'arc mt du cosinus et du sinus ; et l'on devra même égaler à part les deux coefficients du cosinus, à part aussi ceux du sinus, sauf ces derniers dans le cas $m = 0$, où le cosinus est constant et le sinus nul. En effet, si la différence des deux membres, qui est continuellement zéro, ou du moins évanouissante (c'est-à-dire infiniment petite), pour toutes les valeurs très grandes de t, n'avait pas ses coefficients identiquement nuls eux-mêmes, elle constituerait une expression sans cesse nulle pour t très grand, et cependant de la forme

$$(163)\quad A \sin mt + B \cos mt + A' \sin m't + B' \cos m't + A'' \sin m''t + \ldots,$$

avec au moins quelques coefficients, A′, B′, par exemple, différents de zéro. Or, multipliée par $\sin m't$ ou par $\cos m't$, elle donnerait un produit, continuellement nul, dont un seul terme, $A' \sin^2 m't$ ou $B' \cos^2 m't$, aurait, pour t très grand, sa valeur moyenne de grandeur appréciable, savoir, égale à la moitié du coefficient correspondant A′ ou B′, tandis que tous ses autres termes, proportionnels à des produits comme

$$\sin mt \sin m't, \qquad \cos mt \sin m't, \qquad \cos m't \sin m't, \qquad \ldots,$$

respectivement égaux à

$$\tfrac{1}{2}[\cos(m - m')t - \cos(m + m')t], \qquad \tfrac{1}{2}[\sin(m + m')t - \sin(m - m')t],$$
$$\tfrac{1}{2} \sin 2m't, \qquad \ldots,$$

auraient évidemment leurs valeurs successives de signes variés et leurs moyennes, pendant des temps assez longs, aussi voisines de

Digitized by Google

zéro qu'on voudrait. L'annulation *continuelle* du produit exigeant que sa valeur moyenne soit zéro, il serait dès lors impossible de ne pas annuler A' ou B'.

C'est donc identiquement, que les deux termes (162) de u, affectés d'un paramètre quelconque m, devront par leur somme vérifier les équations (150) à (152), quand on y réduira également u_e, S, S_1, Δ à leurs deux termes de cette forme. Autrement dit, les températures u, une fois devenues périodiques comme les circonstances qui les modifient sans cesse, se formeront par simple superposition ou addition des valeurs qu'elles auraient séparément, si l'expression de ces circonstances ne comprenait que les termes trigonométriques d'une même période 2T ou d'un même paramètre m. L'on aura ainsi à déterminer par les équations (150) à (152), pour chaque période 2T donnée, deux fonctions distinctes V, W de x, y, z, au lieu d'une seule, U, qu'on devait trouver dans le problème des températures stationnaires. Comme ici chaque équation se dédoublera, par le fait de l'égalité séparée de ses deux termes en $\sin mt$ et de ses deux termes en $\cos mt$, il viendra aussi deux fois plus d'équations que dans ce problème; et l'on conçoit qu'elles pourront déterminer V, W, non moins que (150) à (152) y déterminaient U.

Au reste, le cas de la permanence est compris dans celui de la périodicité, dont il se déduit en faisant simplement $m = 0$ ou $T = \infty$; et il se produira évidemment pour la partie des développements trigonométriques correspondant à $m = 0$, c'est-à-dire aux valeurs moyennes qu'auront en chaque point les fonctions u_e, S, S_1, Δ et, par suite, u, quand ces valeurs moyennes ne seront pas nulles. Alors l'expression (162) de u se réduit à la fonction W de x, y, z, indépendante du temps; et il en est de même des expressions analogues de u_e, S, S_1, Δ. Ainsi la valeur U de u, dans le problème des températures stationnaires, n'est pas autre chose que ce à quoi se réduit W quand on suppose m nul, ou la période 2T infinie. En d'autres termes, la permanence est une périodicité pendulaire de période infinie.

112. Alors les températures du système le deviennent elles-mêmes asymptotiquement. — Une fois les fonctions V, W obtenues, on connaîtra donc, aux équations (150), (151) et (152) du

Digitized by Google

problème, une solution particulière, de la forme trigonométrique

$$u = \Sigma(V \sin mt + W \cos mt); \tag{164}$$

et, si l'on remplace, dans ces équations, u par $u + u'$, en ajoutant à la solution particulière (164) l'excédent u' de toute autre solution sur celle-là, il viendra évidemment en u' des relations de même forme que (150) à (152), mais débarrassées des termes en u_e, S, S_1, Δ. Autrement dit, l'excédent u' est régi par les équations d'un *simple refroidissement* du système (censé privé de ses sources de chaleur et soumis à la température extérieure zéro).

Si l'on veut que le problème soit déterminé, on devra se donner les températures effectives, que j'appellerai $f(x, y, z)$, à une époque t_0 choisie comme instant initial. Ce seront, par exemple, les températures, ou connues directement, ou déduites d'un état antérieur, relatives au moment même, t_0, à partir duquel les conditions de l'échauffement auront été désormais périodiques. Alors les valeurs initiales ou correspondantes de u' seront

$$f(x, y, z) - \Sigma(V \sin mt_0 + W \cos mt_0);$$

et cette partie u' de la solution se trouvera complètement définie. On sait qu'exprimant un simple refroidissement, elle est évanouissante à la longue, ou qu'elle tend vers zéro pour t infini. Donc la température u se réglera bien, comme on l'avait provisoirement admis, par voie de périodicité ; et sa solution trigonométrique ou à termes pendulaires (164), comprenant généralement une partie permanente en $m = 0$, fournira les valeurs définitives de la température, quel qu'ait pu être l'état initial $f(x, y, z)$.

Dans la prochaine Leçon, nous reposerons nos esprits de la trop longue suite de considérations ou de théories générales qui précède, en en faisant une application simple à une des plus belles questions dont Fourier ait doté la Philosophie naturelle, l'échauffement du sol terrestre par le soleil.

Digitized by Google

QUATORZIÈME LEÇON.

APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE AU SOL TERRESTRE.

113. Application aux inégalités annuelle et diurne de la température du sol terrestre : exposé du problème. — La théorie précédente comporte d'importantes applications, dont la plus remarquable est relative aux températures du sol et du sous-sol terrestres. La principale cause d'échauffement qui s'y manifeste, pour modifier suivant sa présence ou son absence la température extérieure u_e, est le soleil, soumis à très peu près dans son mode d'action aux deux périodes superposées du jour et de l'année; ce qui donne lieu, d'une part, à l'échauffement diurne et au refroidissement nocturne, d'autre part, aux vicissitudes des saisons, consistant surtout dans l'élévation estivale de la température et dans son abaissement hivernal.

La seconde de ces périodes, bien que trois cent soixante-cinq fois et un quart plus longue que la première, est cependant trop courte encore, par rapport aux temps qu'emploierait la chaleur à pénétrer seulement, en quantité notable, jusqu'à une centaine de mètres de profondeur, pour que ces alternatives de l'action solaire en produisent d'analogues, sensibles, de la température, aux distances de la surface qui sont non pas même de l'ordre du rayon terrestre, mais seulement de l'ordre des plus grandes profondeurs accessibles à l'homme. La courbure de la surface, la variation des circonstances climatériques d'un endroit à l'autre suivant les sens horizontaux, souvent même les inégalités de composition des roches, seront donc négligeables, dans des étendues de dimensions beaucoup plus grandes que les profondeurs auxquelles on observera des variations alternatives de la température.

D'ailleurs, les causes générales d'échauffement que peut offrir le

Digitized by Google

globe dans ses grandes profondeurs, comme réactions chimiques non encore terminées (autres que purement locales), ou restes d'une chaleur produite ou introduite anciennement, agiront partout de la même manière dans les étendues restreintes dont il s'agit ; car le sol et le sous-sol constituent simplement, non pas même l'écorce, mais à peine l'épiderme du globe, et seront, sous la partie minime à considérer de la surface terrestre, comme un point dans l'énorme masse influencée par les causes générales en question.

Donc, la température, aux plus grandes profondeurs du sous-sol, là où cesseront de se faire sentir les inégalités des saisons, sera une constante sur toute l'étendue de la face interne du fragment considéré de l'épiderme terrestre ; et, à la face externe du même fragment, la température extérieure u_e ne variera qu'avec le temps t, non d'un point à l'autre de la superficie. Enfin, entre ces deux faces, la température u variera suivant la profondeur, mais non, sensiblement, dans les sens qui leur sont parallèles.

Par conséquent, si nous prenons le plan tangent à la surface pour plan des yz et une normale dirigée vers l'intérieur pour axe des x, u ne dépendra ni de y, ni de z, mais variera assez vite avec x, aux profondeurs x de quelques mètres, pour paraître, en comparaison, devenir constant aux profondeurs plus grandes, ou y avoir sa dérivée en x désormais nulle : hypothèse qui nous donnera des résultats déjà approchés et faciles à compléter ensuite. Elle revient, comme on voit, à annuler le flux F_n à travers la face inférieure de la dernière des couches considérées, comme si la face en question était imperméable à la chaleur. On simplifiera l'expression de ce fait analytique, sans rien modifier sensiblement au point de vue de l'observation, en imaginant la fonction u, une fois devenue ainsi presque constante, prolongée jusqu'à $x = \infty$, mais avec dérivée en x négligeable dans tout ce prolongement; de manière que l'annulation *analytique* de cette dérivée ne se produise qu'*asymptotiquement*, après s'être produite *physiquement* (c'est-à-dire à des écarts près insensibles), dès avant les grandes profondeurs.

En admettant d'ailleurs l'isotropie et l'homogénéité des roches traversées, ainsi que l'absence de toute réaction chimique ou de

Digitized by Google

toute source de chaleur dans leur matière [1], on aura, dans (150) (p. 202),

$$F_x = K\frac{du}{dx}, \qquad F_y = 0, \qquad F_z = 0, \qquad S = 0, \qquad L = 0,$$

et, dans (151) (même p. 202),

$$S_1 = 0, \qquad F_n = -K\frac{du}{dx} \text{ (à la surface } x = 0),$$

avec K, k, C constants. Alors, si, divisant par C l'équation indéfinie et par K la condition à la surface libre $x = 0$, l'on pose, pour abréger,

$$(165) \qquad a^2 = \frac{K}{C}, \qquad h = \frac{k}{K},$$

il viendra l'équation indéfinie

$$(166) \qquad \frac{du}{dt} - a^2\frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

avec les conditions, spéciales aux deux limites $x = 0$, $x = \infty$,

$$(167) \quad (\text{pour } x = 0)\ \frac{du}{dx} - hu = -hu_e, \qquad (\text{pour } x = \infty)\ \frac{du}{dx} = 0.$$

D'ailleurs, la température extérieure u_e se composera de sa valeur moyenne dans la contrée étudiée, valeur dont nous négligeons les variations ou *lentes*, ou *accidentelles*, d'une année à l'autre, plus deux inégalités (écarts de la moyenne), l'une, positive en été, négative en hiver, ayant l'année pour période, l'autre, positive le jour, négative la nuit, ayant pour période le jour solaire. Chacune de ces inégalités, développée par la série de Fourier, se décomposera elle-même en inégalités pendulaires, ayant leurs périodes 2T égales soit à l'année ou au jour, soit à leurs sous-multiples.

Prenons comme zéro ou origine de nos températures u la température extérieure *moyenne*, afin que u_e se compose uniquement de termes trigonométriques. Alors *la partie permanente* de la solution, correspondant à $u_e = 0$, *sera nulle*. Car l'équation indéfinie (166) y deviendra $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, ou signifiera que la dérivée

[1] On négligera donc, en particulier, les changements apportés aux températures intérieures par l'infiltration des eaux pluviales.

Digitized by Google

première $\frac{du}{dx}$ y a, quel que soit x, la valeur zéro imposée par la seconde condition (167) dans les grandes profondeurs; et dès lors la première condition (167), réduite à $u = 0$ pour x nul, obligera d'annuler la valeur de u, constante à toutes les profondeurs considérées.

Nous savons donc que l'expression totale cherchée de u, à deux parties périodiques, sera la somme des valeurs qu'elle aurait séparément, si u_e se réduisait à ses deux termes, en sinus et cosinus, de chacune des périodes finies existant dans son développement trigonométrique.

Pour simplifier nos formules le plus possible, prenons : 1°, d'une part, comme origine des temps t, un moment où l'écart u_e, dans l'inégalité pendulaire en question, soit nul et en train de croître (comme, par exemple, l'équinoxe de printemps pour l'inégalité annuelle), ce qui annulera dans u_e le terme en $\cos mt$ et rendra positif le coefficient de $\sin mt$; 2°, d'autre part, comme unité ou degré de température, la demi-amplitude de cette inégalité, de manière que, dans u_e, le coefficient de $\sin mt$ soit 1. Enfin, toujours pour simplifier nos formules, nous aurons intérêt à poser

$$(168) \qquad m \text{ ou } \frac{\pi}{T} = 2a^2\mu^2, \qquad \mu = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2T}},$$

et à introduire ainsi un nouveau paramètre positif μ au lieu de m. L'expression de u_e, à porter dans notre première relation (167), sera dès lors, simplement,

$$(169) \qquad u_e = \sin 2a^2\mu^2 t.$$

114. Calcul de chaque inégalité pendulaire entrant dans leur expression. — Substituons dans (166) l'expression correspondante de u, qui, d'après (162), sera

$$(170) \qquad u = V \sin 2a^2\mu^2 t + W \cos 2a^2\mu^2 t,$$

avec V, W fonctions de x. La vérification de cette équation (166) aux époques où s'annule soit $\cos 2a^2\mu^2 t$, soit $\sin 2a^2\mu^2 t$, obligera à annuler séparément, comme on le sait d'ailleurs, le coefficient du sinus et celui du cosinus; ce qui donne en V et W les deux équations différentielles simultanées

$$(171) \qquad V'' + 2\mu^2 W = 0, \qquad W'' - 2\mu^2 V = 0.$$

Digitized by Google

De la première, différentiée deux fois en x, il résulte, par l'élimination de W'' au moyen de la seconde, l'équation linéaire du quatrième ordre, en V,

$$V^{iv} + 4\mu^4 V = 0.$$

Ses solutions simples sont de la forme e^{rx}, avec r égal aux racines quatrièmes de $-4\mu^4$, c'est-à-dire à $(1 \pm \sqrt{-1})\mu$ et à $(-1 \pm \sqrt{-1})\mu$. L'intégrale générale (et unique) sous forme réelle est donc, avec quatre constantes arbitraires M, N, M', N',

$$(172) \quad V = e^{-\mu x}(M \cos \mu x - N \sin \mu x) + e^{\mu x}(M' \cos \mu x + N' \sin \mu x).$$

Mais la seconde condition (167), spéciale aux grandes profondeurs x, exige que la dérivée V' ne devienne pas infinie, et même s'annule, pour $x = \infty$; ce qui exclut les termes en $e^{\mu x}$, ou oblige à poser $M' = 0$, $N' = 0$. Puis la valeur (172) de V, portée dans la première (171), détermine W; de sorte qu'il vient, en définitive,

$$(173) \quad V = e^{-\mu x}(M \cos \mu x - N \sin \mu x), \qquad W = -e^{-\mu x}(N \cos \mu x + M \sin \mu x),$$

valeurs qui satisfont aussi à la seconde équation (171) et rendent, par conséquent, l'expression (170) de u intégrale de l'équation indéfinie (166).

On remarquera que W se déduit de V par les changements de M en $-N$ et de N en M; ce qui permet, après avoir évalué directement les dérivées V' et V'', d'obtenir W' et W'' sans nouveaux calculs.

L'expression (170) de u devient donc, vu (173),

$$(174) \quad u = e^{-\mu x}[M \sin(2a^2\mu^2 t - \mu x) - N \cos(2a^2\mu^2 t - \mu x)].$$

Il reste, pour déterminer M et N, la relation (167) spéciale à la surface libre $x = 0$, où u_e a la valeur (169). Or cette condition, dans laquelle on portera la valeur (170) de u, devra être vérifiée aux époques où s'annule soit le cosinus, soit le sinus de $2a^2\mu^2 t$; ce qui la dédoublera, comme on sait, et donnera

$$(\text{pour } x = 0) \qquad V' - hV = -h, \qquad W' - hW = 0,$$

ou, avec les valeurs M, $-N$, $-\mu(M + N)$, $\mu(N - M)$ de V, W, V', W' à la limite $x = 0$,

$$(175) \qquad (\mu + h)M + \mu N = h, \qquad -\mu M + (\mu + h)N = 0.$$

Digitized by Google

Partant de la seconde, pour tenir compte ensuite de la première, on en déduit

$$(175\ bis)\qquad \frac{M}{\mu+h}=\frac{N}{\mu}=\frac{h}{(\mu+h)^2+\mu^2},$$

ou bien

$$(176)\qquad M=\frac{h\cos\delta}{\sqrt{(\mu+h)^2+\mu^2}},\qquad N=\frac{h\sin\delta}{\sqrt{(\mu+h)^2+\mu^2}},$$

δ désignant l'angle, compris entre zéro et un demi-droit, dont la tangente est

$$(177)\qquad \operatorname{tang}\delta=\frac{\mu}{\mu+h}=\frac{1}{1+\frac{h}{\mu}}.$$

Cet angle δ, à tangente positive et plus petite que 1, ne doit pas être pris dans le quatrième quadrant de la circonférence; car les équations (175 *bis*), où μ et h sont essentiellement positifs, montrent que les coefficients M, N sont positifs également.

Et la formule (174) donne enfin l'expression définitive cherchée des températures, u, produites dans le sol par l'inégalité pendulaire (169) de la température extérieure,

$$(178)\qquad u=\frac{he^{-\mu x}}{\sqrt{(\mu+h)^2+\mu^2}}\sin(2a^2\mu^2t-\mu x-\delta).$$

Nous savons d'ailleurs que la température intérieure *effective* s'obtiendra, à chaque profondeur x et à chaque instant, par simple addition des températures analogues, dues à toutes les inégalités pendulaires constituant ensemble les deux inégalités générales, annuelle et diurne, de u_e.

115. Loi régissant l'amplitude des variations de la température dans le sol. — A chaque profondeur x, l'inégalité (178) a évidemment pour demi-amplitude le coefficient de $\sin(2a^2\mu^2t-\mu x-\delta)$. Si donc on appelle α ce coefficient, rapport de la demi-amplitude de la variation pendulaire de la température, dans l'intérieur, à la demi-amplitude correspondante, 1, dans la température exté-

Digitized by Google

rieure u_e, on aura, vu, finalement, (168) et (165),

$$(179)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{h}{\sqrt{(\mu+h)^2+\mu^2}}\, e^{-\mu x} \\ = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi KC}{2T}}+1\right)^2+\left(\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\pi KC}{2T}}\right)^2}}\, e^{-x\sqrt{\frac{\pi C}{2kT}}}. \end{cases}$$

L'amplitude de l'inégalité se trouve réduite, dès la surface du sol, c'est-à-dire pour x infiniment petit, dans le rapport de $\sqrt{(\mu+h)^2+\mu^2}$ à h, ou du radical figurant dans le troisième membre à 1, et, par conséquent, d'autant plus que la conductibilité extérieure k est moindre, la conductibilité intérieure K et la capacité calorifique C plus grandes, enfin, la période 2T plus courte. Donc, déjà à fleur de terre, les inégalités pendulaires représentant la variation diurne de la température sont notablement plus réduites que celles qui représentent la variation annuelle.

Mais cette réduction plus grande s'accuse surtout à mesure que l'on s'enfonce dans le sol, et que se produit le décroissement rapide du facteur évanouissant $e^{-\mu x}$ ou $e^{-x\sqrt{\frac{\pi C}{2kT}}}$. Ce facteur exprime, en effet, une réduction croissante avec la capacité calorifique C, mais variable en sens inverse de la conductibilité intérieure K et de la période 2T. Par exemple, la profondeur, x, à laquelle il faut descendre, pour que la réduction qui en résulte soit la même dans deux inégalités de périodes différentes, est visiblement proportionnelle à $\sqrt{T}$; de telle sorte que, si une inégalité annuelle se fait sentir jusqu'à une certaine profondeur, une inégalité diurne, supposée aussi forte que celle-là sous la surface, ne pénétrera que jusqu'à une profondeur $\sqrt{365,25} = 19,13$ fois moindre; et bien moins encore, c'est-à-dire pas même au vingtième de la profondeur qu'atteint l'inégalité annuelle, si elle n'a amplitude pareille qu'à l'extérieur.

D'après cela, et en empruntant d'ailleurs à l'observation ce fait, que l'inégalité annuelle est sensible dans nos climats tempérés jusqu'à une profondeur d'environ une quinzaine de mètres, on conçoit que la variation diurne pénètre à peine jusqu'à quelques décimètres sous le sol, surtout dans les endroits abrités. Et si l'on tient compte de ce que l'inégalité annuelle sera évidemment expri-

Digitized by Google

mée, en majeure partie, par les deux termes de son développement trigonométrique qui ont sa propre période d'une année, on conçoit même que les inégalités pendulaires, beaucoup moins amples dans u_e et de périodes 2, 3, 4, ... fois moindres, qui complètent son expression, disparaissent également à des profondeurs insignifiantes, à côté de celles qu'elle atteint. Donc, au-dessous d'une première et mince couche, de 1^m à 2^m au plus, il n'y aura de sensible, dans nos pays tempérés, que l'inégalité pendulaire annuelle. Admettons que ce soit celle-là que représente la formule (178); et cette formule exprimera, à elle seule, les températures effectives u aux diverses profondeurs supérieures environ à 1^m ou 2^m, jusqu'au point où elles s'évanouiront.

D'ailleurs, à toute profondeur, chaque inégalité pendulaire (178) ne dépend, comme on voit, du temps que par son facteur sinus, dont la valeur moyenne est nulle entre deux instants assez éloignés. La température moyenne fournie, à une profondeur quelconque x, par la somme de toutes les inégalités pendulaires, se confond ainsi avec la moyenne même, prise pour zéro, des températures extérieures u_e, du moins dans la mesure où serait admissible l'uniformité de température, à toutes les profondeurs considérées ici, sans l'existence des saisons et sans les alternatives du jour et de la nuit. Au point où les inégalités deviennent insensibles, la température effective et invariable est donc à très peu près zéro, c'est-à-dire la température extérieure moyenne. Et l'on peut ainsi obtenir avec une certaine approximation, comme l'a établi en premier lieu Fourier, la température moyenne annuelle de la surface d'une contrée, par une seule observation, savoir, par la simple lecture du nombre de degrés que marque le thermomètre, dans une cave juste assez profonde pour que la colonne thermométrique y reste fixe. Cette observation est facile sous les climats tropicaux, où la couche de température invariable, surtout dans les endroits abrités, n'est qu'à un ou deux décimètres de profondeur, les différences des saisons s'y trouvant presque insignifiantes.

Fourier supposait données directement les températures du sol à sa surface. Poisson [1] a tenu compte des températures exté-

[1] Dans son Traité sur la *Théorie mathématique de la chaleur*, p. 500 et suiv.

Digitized by Google

rieures u_e, en posant la condition (167) ci-dessus, relative à la surface $x = 0$. Malheureusement, ces dernières, u_e, définies comme étant, à chaque instant, la température que devrait avoir le sol pour n'éprouver ni gain, ni perte de chaleur à travers sa superficie, diffèrent notablement des températures propres de l'air, telles, du moins, qu'on les mesure d'ordinaire, savoir, par un thermomètre placé un peu au-dessus du sol et abrité du soleil, mais dans un lieu découvert, c'est-à-dire à l'air libre et à l'ombre.

La vaste étendue et la mobilité de l'atmosphère, avec grande variété de conditions pour ses régions diverses, soit juxtaposées, soit superposées, sa diathermanéité, l'extrême petitesse qu'y ont les coefficients K et L, font que, à sa pression sensiblement constante près du sol, elle s'échauffe ou se refroidit surtout par convection, au contact de la surface terrestre, où viennent successivement ses molécules. Aussi les changements de température de l'éther au-dessus de cette surface (1) se communiquent-ils beaucoup

---

(1) **Réflexions sur les températures de l'éther à la surface des corps et, spécialement, du sol terrestre.** — En vue d'exprimer assez simplement les échanges d'énergie calorifique entre les corps et l'éther, on étend à celui-ci, comme nous avons fait (p. 103, 164, 172), la notion de *température :* il suffit, pour conserver sa netteté et son utilité à cette notion ainsi étendue, que divers corps, placés *de la même manière* au sein d'un éther siège d'une agitation donnée, soient en équilibre de chaleur avec lui quand ils possèdent une *même* température, que l'on dit dès lors être la *sienne* dans l'étude calorifique de ces corps. Mais il ne faut pas oublier que, souvent, peut-être même le plus souvent, l'énergie calorifique de l'éther a, tout à la fois, grandeur et *direction :* c'est quand elle consiste en *ondes* distinctes, lesquelles, en chaque endroit, se propagent exclusivement suivant un certain sens et non, comme la chaleur d'un corps athermane isotrope, également en tous sens. La proportion de l'énergie ainsi *orientée,* qui tend à pénétrer dans un corps, à travers l'unité d'aire de sa superficie, varie donc non seulement avec la valeur absolue de cette énergie par unité de volume d'éther, mais aussi avec l'inclinaison du *plan* des ondes par rapport à la surface, même avec l'orientation des vibrations (quand celles-ci sont *polarisées*) par rapport au *plan d'incidence.*

Donc la température de l'éther *à la surface d'un corps,* lorsque, comme dans la question présente, on ne pourra plus la confondre avec la température même du fluide entourant le corps, sera une quantité bien moins simple que cette dernière : elle dépendra non seulement de l'état intrinsèque de l'éther, mais aussi des angles dont il vient d'être parlé ; et, sans doute, la conductibilité extérieure k ou hK sera, alors, également fonction des mêmes angles, sauf à lui attribuer dans chaque phénomène, pour rendre les calculs possibles, une valeur moyenne appropriée. C'est ce qui doit arriver notamment à la surface de la terre, quand le soleil brille sur l'horizon ; car la droite joignant son centre à l'élément de

Digitized by Google

plus vite (dans la mesure où ils peuvent le faire) au sol qu'à l'air, dont l'influence calorifique sur le sol est, dès lors, contraire à celle de l'éther; et la température *extérieure* u_e, à introduire dans nos formules (167) et (169), doit être une assez petite fraction, d'ailleurs variable, de la température même de l'éther, ou cette température fortement atténuée, surtout dans ses variations diurnes ou à courte période, pour tenir compte de l'influence contraire et modératrice de l'air [1]. C'est donc seulement *en moyenne*, ou abstraction faite des inégalités périodiques, qu'il y aura, à très peu près, égalité des températures du sol, de l'air, de l'éther et de cette sorte d'intermédiaire entre les deux dernières qu'est notre température extérieure u_e.

L'expérience a, d'ailleurs, confirmé l'égalité, *en moyenne*, qui était à prévoir, des deux températures du sol et de l'air, ou, du moins, de deux thermomètres placés, l'un, dans le sol, à fleur de terre, l'autre, un peu au-dessus du sol, à l'air libre et à l'ombre.

---

surface considéré du sol joue un rôle prépondérant dans la forme spéciale qu'y prend l'agitation de l'éther.

Il semble qu'on pourrait, au contraire, sous un ciel couvert, regarder celle-ci comme confuse, ou à peu près pareille en tous sens, et même identifier, au bout d'un temps suffisant, la température de l'éther avec celle de l'air.

C'est probablement à raison de ces difficultés, que Fourier, en inaugurant la théorie des inégalités périodiques des températures terrestres, *s'est donné* la température *intérieure*, à la surface du sol, sans s'occuper de ce qui se passe dans l'atmosphère ambiante.

[1] Appelons, pour l'époque quelconque t, U_e la température de l'éther *à la surface du sol*, u_a celle de l'air; et, u étant la température intérieure sous la surface, soient, respectivement,

$$k_e(U_e - u), \qquad k_a(u_a - u),$$

les deux flux de chaleur cédés au sol par l'éther et par l'air. Leur somme aura l'expression voulue $k(u_e - u)$, à la double condition de prendre

$$k = k_e + k_a, \qquad u_e = \frac{k_e U_e + k_a u_a}{k} = \frac{k_e}{k} U_e + \frac{k_a}{k} u_a.$$

Si k_a est, comme il semble assez probable, beaucoup plus grand que k_e, il vient sensiblement

$$u_e = \frac{k_e}{k} U_e + u_a;$$

et les variations u_e de la température *dite* extérieure sont la petite fraction constante $\frac{k_e}{k}$ des variations mêmes de température, U_e, de l'éther, à peu près accrue, *algébriquement*, des variations simultanées u_a de la température de l'air.

Digitized by Google

comme on a dit. Elle a aussi montré leur quasi-égalité commune à la température des lieux qui, sans être très profonds, le sont assez pour qu'elle y soit à très peu près invariable toute l'année [1].

116. Lois régissant les retards des mêmes variations sur celles de la température extérieure. — L'inégalité pendulaire exprimée par la formule (178) atteint successivement, aux diverses profondeurs x, une même *phase* de ses variations, c'est-à-dire des valeurs représentant partout une même fraction positive ou négative de sa demi-amplitude totale, aux instants t qui rendent constant l'arc $2a^2\mu^2 t - \mu x - \delta$ du sinus mesurant justement cette fraction. Sous la surface même, à une profondeur x nulle, le produit $2a^2\mu^2 t$ dépasse donc de δ, à phase égale, ce qu'il serait au dehors, c'est-à-dire dans la formule (169) de la température extérieure u_e. Autrement dit, il se produit, à la traversée de la couche superficielle, un retard dans la variation de l'inégalité pendulaire considérée de température; et ce retard, $\frac{\delta}{2a^2\mu^2}$, correspond à la fraction $\frac{\delta}{2a^2\mu^2 T}$ d'une demi-période T, fraction égale, d'après (168), à $\frac{\delta}{\pi}$, ou comprise entre zéro et $\frac{1}{4}$, mais d'autant plus grande, d'après (177), que $\frac{h}{\mu}$, c'est-à-dire $k\sqrt{\frac{2T}{\pi KC}}$, est moindre. Les diverses inégalités pendulaires emploient donc, à traverser la couche superficielle terrestre, une fraction de leur période d'autant plus sensible que cette période est plus petite.

Une fois transmise au sol, chaque phase se propage aux profondeurs x croissantes au bout de temps t donnant

$$2a^2\mu^2 t - \mu x = \text{const.},$$

ou

$$\frac{dx}{dt} = 2a^2\mu = a\sqrt{\frac{2\pi}{T}} = \sqrt{\frac{2\pi K}{CT}}. \tag{180}$$

La vitesse $\frac{dx}{dt}$ de propagation est donc la même pour toutes les phases d'une même inégalité pendulaire, et inverse de la racine carrée de la période. Ainsi l'inégalité diurne se propage 19,13 fois plus vite que l'inégalité annuelle : circonstance n'ayant, il est vrai,

[1] On verra ci-après (n° 118) la raison de ces légères restrictions.

Digitized by Google

d'intérêt qu'aux minimes profondeurs, les seules où cette onde soit perceptible.

La longueur correspondante d'ondulation, distance séparant deux maxima successifs ou deux minima successifs de l'inégalité pendulaire, bref, deux points où l'arc $2a^2\mu^2 t - \mu x - \delta$ diffère d'une période 2π de son sinus, est le chemin,

$$2a^2\mu \times 2T = 2\sqrt{\frac{2\pi KT}{C}},$$

parcouru durant une période $2T$ par l'observateur qui suivrait chaque phase dans sa propagation.

117. Détermination des paramètres δ et μ, ou a et h, par l'observation de l'inégalité annuelle ; vérifications expérimentales. — L'inégalité pendulaire annuelle étant seule sensible aux profondeurs supérieures à 1^m ou 2^m, des observations qu'on y fera, dans un sol et un sous-sol homogènes, devront être exprimées par la formule (178), dans laquelle on sait que l'unité de température correspond à la demi-amplitude de la variation annuelle des températures extérieures u_e. Si donc A désigne cette demi-amplitude exprimée en degrés centigrades, le second membre de (178) devra être multiplié par A pour exprimer aussi l'écart u en degrés de cette espèce.

Cela posé, voici comment Poisson détermine les deux constantes μ et h de la formule :

L'expérience donne, à deux profondeurs mesurées différentes x et x', les températures maxima u_M, u'_M et les températures minima u_m, u'_m. Les excès des premières sur les secondes, $u_M - u_m$ et $u'_M - u'_m$, sont le double des demi-amplitudes correspondantes

$$\frac{A\,he^{-\mu x}}{\sqrt{(\mu+h)^2+\mu^2}} \quad \text{et} \quad \frac{A\,he^{-\mu x'}}{\sqrt{(\mu+h)^2+\mu^2}};$$

d'où il résulte, pour le rapport de celles-ci,

$$\frac{u_M - u_m}{u'_M - u'_m} = e^{\mu(x'-x)}.$$

On en déduit

$$\mu = \frac{1}{x'-x} \log \text{nat} \frac{u_M - u_m}{u'_M - u'_m}. \tag{181}$$

Digitized by Google

Le dernier membre étant fourni par l'observation, on connaîtra μ; et l'on tirera a de la seconde formule (168), où $2T$ sera l'année, que l'on pourra d'ailleurs choisir comme unité de temps.

Il reste à obtenir δ. Dans ce but, Poisson note l'époque t_m où se produit, à une profondeur modérée x sous la surface, le minimum u_m de température qui précède l'équinoxe de printemps, *équinoxe censé coïncider avec l'instant,* origine des temps t, *où* u_e *s'annule;* et il note aussi l'époque t_M du maximum suivant. L'un correspondant à l'arc $-\frac{\pi}{2}$ du sinus, dans la formule (178), et, l'autre, à l'arc $\frac{\pi}{2}$ de ce sinus, on aura

$$2a^2\mu^2 t_m - \mu x - \delta = -\frac{\pi}{2}, \qquad 2a^2\mu^2 t_M - \mu x - \delta = \frac{\pi}{2};$$

et, par suite, l'instant $\frac{1}{2}(t_m + t_M)$, qui tient le milieu entre ces deux époques, vérifiera la formule

$$a^2\mu^2(t_m + t_M) = \mu x + \delta. \tag{182}$$

De cette relation, où a, μ et x seront aussi connus, Poisson tire δ; après quoi, la formule (177) donne

$$\frac{h}{\mu} = \cot\delta - 1, \tag{183}$$

et fait connaître h, qui est le rapport $\frac{k}{K}$ des deux conductibilités superficielle et intérieure.

Alors la formule (178), devenue complètement explicite (après multiplication de son second membre par la demi-amplitude A, qu'on déduit de l'un des écarts $u_M - u_m$), peut être directement comparée à toutes les autres observations faites au même endroit.

Poisson a effectué justement cette confrontation [1], à la suite

---

[1] *Voir* l'endroit cité ci-dessus, p. 500 et suivantes, de son Traité sur la *Théorie mathématique de la chaleur*. Il est à peine nécessaire de dire que les valeurs *normales* (ou à comparer aux formules), en chaque endroit, du maximum u_M, du minimum u_m, et des époques t_M, t_m où ils ont lieu, s'obtiendront en prenant les moyennes de leurs quatre valeurs respectives, constatées dans les quatre ans qu'a duré l'observation; car celles-ci sont affectées, comme le climat lui-même, et surtout aux faibles profondeurs, de petites inégalités accidentelles, ou peut-être à longue période, dont la loi et les causes n'ont pu encore être débrouillées.

Poisson donne des formules beaucoup plus compliquées que les miennes, parce

Digitized by Google

d'observations faites par Arago, dans le Jardin de l'Observatoire de Paris, au moyen de thermomètres à très longue tige dont le réservoir, suffisamment large, était enterré dans le sol aux profondeurs voulues (qui atteignaient jusqu'au delà de 8^m), et dont la colonne mercurielle, s'élevant au-dessus du sol, permettait de lire à tout instant les degrés de température du réservoir. Avec les unités année, mètre et degré centigrade, Poisson a trouvé pour le terrain en question, comme résumant les résultats observés durant quatre années consécutives et à quatre profondeurs différentes, des valeurs qui reviennent à poser, vu nos notations,

$$(184)\quad \left\{\begin{array}{l} a = 5{,}1166, \qquad h = 1{,}0572, \qquad A = 16^\circ{,}112\,; \\ \qquad\qquad\qquad \text{d'où} \\ \mu = 0{,}3464, \qquad \mu + h = 1{,}4036. \end{array}\right.$$

Ces valeurs ont été obtenues comme il vient d'être dit, savoir : celles de a et μ au moyen des deux écarts $u_M - u_m$ observés à deux profondeurs différentes ($6^m{,}497$, $8^m{,}121$), et, ensuite, celles de δ, h, A, en prenant pour h la moyenne des deux valeurs de ce coefficient déduites de la valeur de t, $\frac{1}{2}(t_m + t_M)$, qui tient le milieu entre les deux époques constatées du minimum u_m et du maximum u_M à chacune de ces profondeurs. La formule (178) s'est alors trouvée sensiblement d'accord avec les époques constatées du maximum et du minimum de température à ces deux profondeurs, et aussi avec les écarts $u_M - u_m$ observés à deux autres profondeurs ($1^m{,}624$, $3^m{,}248$).

La longueur d'une ondulation complète, c'est-à-dire de l'espace parcouru de haut en bas dans le sol, en un an, par chaque maximum ou minimum produit à la surface, était, d'après la formule donnée après (180) (p. 221), $2a\sqrt{2\pi T}$, c'est-à-dire ($10^m{,}2332$) $\times \sqrt{\pi}$ ou $18^m{,}14$. On n'observait donc, à toutes les profondeurs expérimentées (jusqu'à $8^m{,}121$), qu'une fraction de longueur d'onde,

---

qu'il a essayé de faire, dans l'expression de la température extérieure u_e, la part de la chaleur solaire, la part de la chaleur due aux étoiles et aux couches supérieures de l'atmosphère, enfin celle de la chaleur de l'air contigu au sol (*voir* les pages 408 à 494 du même *Traité*). Je n'ai pas cru devoir résumer ici cette longue et laborieuse étude, peu de nature à entrer dans un cours classique et dont, malgré sa grande valeur, des hypothèses simplificatrices, douteuses de l'avis même de Poisson, rendent les résultats incertains dans l'état actuel de nos connaissances.

Digitized by Google

les $\frac{1}{9}$ environ; et les retards de phase des températures intérieures, par rapport à la température extérieure u_e, étaient loin d'y atteindre une période complète, même en tenant compte du retard δ $\left(\text{inférieur à } \frac{\pi}{4} \text{ ou à } \frac{1}{8} \text{ de période}\right)$ qui se produisait à la surface.

Remarquons d'ailleurs que ce résultat est ainsi déduit de la connaissance seule de a, ou de μ, tirée de l'observation comparée des amplitudes de l'oscillation à diverses profondeurs, sans qu'on ait eu à y faire usage de la valeur de h, liée au retard δ, qui est bien plus difficile à fixer. Par conséquent, le minimum u_m et le maximum u_M constatés avant et après l'équinoxe de printemps étaient bien ceux qui avaient paru à la surface un quart de période environ avant ou après cet équinoxe, et ils correspondaient, comme on l'a admis, aux deux valeurs respectives $\mp \frac{\pi}{2}$ de l'arc

$$2a^2\mu^2 t - \mu x - \delta,$$

non à ces valeurs diminuées d'un multiple de 2π, comme on aurait pu le craindre. Donc le calcul de δ, h et A a été, sous ce rapport, régulièrement fait (¹).

(¹) Néanmoins, la détermination expérimentale de l'angle δ, caractéristique du retard de phase que produit la traversée de la surface, et, par suite, le calcul des paramètres h et A, comportent beaucoup moins de précision que l'observation de la réduction relative des amplitudes aux profondeurs croissantes et le calcul corrélatif de μ et a. Car une erreur de quelques jours, sur l'époque où s'annule la température extérieure u_e, suffirait pour faire varier δ, h et A de fractions sensibles de leurs valeurs.

Or l'hypothèse, adoptée par Poisson, de la coïncidence de cette époque avec le moment de l'équinoxe est, à la vérité, la plus simple de toutes celles qui sont approchées. Mais on ne pourrait guère la justifier, d'après ce qu'on a vu (p. 219), que si les deux températures de l'éther et de l'air, entre lesquelles u_e doit se trouver sans cesse compris, égalaient sensiblement, à cette époque, leurs valeurs moyennes de toute l'année, ou, du moins, ne contenaient pas, dans la partie de leur développement trigonométrique ayant l'année pour période, de terme différent à ce moment de zéro (où figurerait $\cos 2a^2\mu^2 t$). Peut-être en est-il ainsi pour l'éther, sans que rien permette absolument de l'affirmer; mais, quant à l'air, il n'acquiert sa température moyenne de l'année qu'un mois environ après l'équinoxe.

Lorsqu'on adopte la valeur (184) de h, l'angle δ est $13^\circ 52'$, ou la fraction 0,03852 de la circonférence; et il correspond à $(365^j,25) \times 0,03852 = 14^{\text{jours}},07$. Ces $14^j,07$ expriment donc, à fort peu près, le retard constaté de la *première phase* de l'inégalité annuelle, sous la surface, par *rapport à l'équinoxe de printemps*, et non par rapport au moment *inconnu*, quoique assez peu distant, où s'annule l'inégalité pendulaire principale de la température extérieure. Si, pour tenir

Digitized by Google

Avec les valeurs (184) de μ et h, l'expression (179) de α est

$$(184\ bis) \qquad \alpha = 0{,}7312\, e^{-0{,}3464\, x}.$$

A 15^m de profondeur, on trouve $\alpha = 0{,}00405$ seulement, et, à 20^m de profondeur, $\alpha = 0{,}00072$, ou moins que les trois quarts d'un millième de la variation au dehors près de la surface.

Les mêmes observations ont donné, à très peu près, $10^\circ{,}8$ pour la température moyenne du sol, du moins aux petites profondeurs, ce qui concorde également avec la moyenne obtenue pour les températures successives de l'air au-dessus.

---

quelque compte du retard d'un mois, sur l'équinoxe, qu'éprouve le réchauffement de l'atmosphère, on recule d'un dixième de mois, par exemple, soit de trois jours, l'origine des temps t, instant où u_e s'annule dans (169), c'est-à-dire si l'on admet un retard de trois jours sur l'équinoxe dans la *première* phase de la température extérieure (hypothèse plus vraisemblable peut-être que celle d'une coïncidence absolue), l'écart effectif δ des phases sous la surface, par rapport à l'extérieur, ne sera plus (évalué en temps) que $14^j{,}07 - 3^j = 11^j{,}07$, ou la fraction

$$\frac{11{,}07}{365{,}25} = 0{,}03031$$

d'une période; et il vaudra, en degrés, $360^\circ \times 0{,}03031 = 10^\circ 55'$.

Par suite, la valeur théorique de h deviendra, d'après (183),

$$h = (0{,}3464) \times (\cot 10^\circ 55' - 1) = 1{,}4505,$$

au lieu de 1,0572; et le rapport (179) des amplitudes de l'oscillation dans l'intérieur, à l'amplitude de l'oscillation annuelle de u_e, sera, au lieu de (184 *bis*) ci-après,

$$\alpha = 0{,}7926\, e^{-0{,}3464\, x}.$$

Enfin, comme les valeurs absolues *constatées* des demi-amplitudes, dans le sol, sont exprimées, quelque hypothèse qu'on fasse sur h, par le produit $A\alpha$, A variera en raison inverse de α; et l'on aura

$$A = \frac{16^\circ{,}112 \times 0{,}7312}{0{,}7926} = 14^\circ{,}864.$$

L'amplitude totale $2A$ de la variation annuelle des températures extérieures n'atteindra donc pas 30°, ce qui semble plus vraisemblable que de la porter à 32°.

On voit de combien peu de jours il faudrait retarder, par rapport à l'équinoxe, le moment où l'on suppose que la température extérieure u_e passe par sa valeur moyenne, pour réduire notablement l'amplitude *calculée* $2A$ de l'oscillation annuelle au dehors. Alors celle-ci, $2A$, s'écarterait moins de l'amplitude de l'oscillation correspondante dans le sol, laquelle est, à la surface,

$$2A \frac{h}{\sqrt{(\mu + h)^2 + \mu^2}} = 2(16^\circ{,}112) \times 0{,}7312 = 23^\circ{,}56.$$

Digitized by Google

La variation totale, à Paris, de ce que nous appelons la *température extérieure* u_e, tant au-dessous qu'au-dessus de cette moyenne, serait, à en juger par son oscillation pendulaire principale *ainsi calculée,* la valeur de 2A, c'est-à-dire 32° environ. Or l'oscillation correspondante de la température de l'air à Paris, appréciée d'après l'excédent de la température moyenne de juillet sur celle de janvier [1], est seulement de 17°, c'est-à-dire assez peu supérieure à la moitié de l'amplitude précédente obtenue, 32°. Mais, quoique celle-ci paraisse un peu forte et dût probablement subir une réduction [2], un large écart entre ces deux amplitudes s'explique aisément par les raisons indiquées ci-dessus (p. 218), qui font aussi comprendre que l'air n'acquière une température égale à sa moyenne de toute l'année qu'un mois environ après chaque équinoxe. Même les parties inférieures de l'atmosphère éprouvent donc avec une lenteur et, par suite, une réduction très notables, comparativement au sol, tant l'échauffement des jours d'été que le refroidissement des nuits d'hiver.

Quant à la température intérieure u, à la surface du sol, elle tient à peu près le milieu, pour l'amplitude de sa variation annuelle, entre la température de l'air et la température extérieure u_e, comme on pouvait s'y attendre après les mêmes explications (p. 218). Cette amplitude, en effet, produit de 2A, ou de 32°,224, par la valeur obtenue 0,7312 du rapport α à la limite $x = 0$, est 23°,56.

118. Mise en compte de l'accroissement des températures moyennes dans le sol avec la profondeur. — En réalité, la température moyenne du sol croît lentement avec la profondeur x, et, à la surface, elle excède quelque peu la moyenne des températures extérieures. La dérivée $\frac{du}{dx}$ n'est pas, comme nous l'avons admis, tout à fait nulle sur la face inférieure d'une couche, d'épaisseur l constante, comprenant toute la matière terrestre où se fait sentir l'inégalité annuelle. Elle y a une valeur positive

---

(1) *Voir* dans le même *Traité* de Poisson, p. 463, le Tableau des températures mensuelles moyennes observées par Bouvard à la façade nord de l'Observatoire de Paris, depuis janvier 1806 jusqu'à juillet 1834.

(2) *Voir* une note précédente, p. 224.

Digitized by Google

invariable c, très petite sans doute par rapport à ses valeurs variables du haut de la couche, mais pourtant un peu sensible; car $c = \frac{1}{30}$ environ à Paris, où la température croît à peu près de 1° centigrade par 30^{m} parcourus en profondeur. Tout se passe donc comme si le sol se terminait, à la profondeur $x = l$, par une source calorifique fournissant à son unité d'aire un débit ou flux $S_1 = F_x = Kc$, avec couche imperméable au-dessous, donnant $k = 0$ dans la formule (151) correspondante (p. 202). En un mot, la seconde condition (167) (p. 212) se trouve remplacée par celle-ci :

$$(185) \qquad (\text{pour } x = l) \qquad \frac{du}{dx} = c.$$

Dès lors, la partie permanente de u, obtenue en substituant à u_e et à S_1 leurs valeurs moyennes zéro et Kc, ou en combinant avec l'équation indéfinie $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ la condition (185) et la première (167) prise avec $u_e = 0$, n'est plus nulle. Elle a évidemment la valeur $\frac{c}{h} + cx$.

Le calcul des termes périodiques se fera, de même, en remplaçant la seconde condition (167) par la relation (185), où le second membre, n'ayant pas de partie variable, sera zéro. Bref, il faudra vérifier pour $x = l$, et non plus pour $x = \infty$, la condition d'annulation des dérivées V′ et W′. Ce sont, dans (172) et dans la formule de W qui s'en déduit par la première (171), les deux termes en $e^{\mu x}$, ou à coefficients M′ et N′, qui permettront de le faire. Or, à la profondeur $x = l$, où les termes en $e^{-\mu x}$ sont insensibles, ces conditions seront vérifiées par des valeurs, insensibles aussi, de $M'e^{\mu x}$ et de $N'e^{\mu x}$, puisque celles-ci seraient nulles si $Me^{-\mu x}$ et $Ne^{-\mu x}$ l'étaient. Dès lors, les rapports de $M'e^{\mu l}$ et $N'e^{\mu l}$ à $Me^{-\mu l}$ et $Ne^{-\mu l}$ étant finis, ceux de M′, N′ à M, N seront de l'ordre de $e^{-2\mu l}$, c'est-à-dire incomparablement plus négligeables encore que $e^{-\mu l}$. Donc, aux profondeurs modérées où les deux exponentielles $e^{\mu x}$, $e^{-\mu x}$ sont comparables, c'est-à-dire où se fait sentir l'inégalité annuelle, les termes en M′, N′ s'évanouiront complètement, et, en particulier, ils n'empêcheront pas les coefficients M, N de se déterminer, par la première condition (167), comme si M′, N′ n'existaient pas.

Digitized by Google

Il n'y aura, ainsi, rien à changer d'appréciable dans l'expression des termes périodiques ; et, aux profondeurs où l'inégalité pendulaire annuelle subsiste seule, il viendra simplement, au lieu de la formule (178) (p. 215), en adoptant le degré centigrade comme unité de température,

$$(186)\qquad u = \frac{c}{h} + cx + A\frac{he^{-\mu x}}{\sqrt{(\mu+h)^2+\mu^2}}\sin(2a^2\mu^2 t - \mu x - \delta).$$

La température *moyenne* du sol excède donc de $\frac{c}{h} + cx$ la moyenne (prise pour zéro) des températures extérieures u_e. Avec la valeur (184) de h, et en faisant $c = \frac{1}{30}$, cet excédent n'est pas même, à la surface, $\frac{1}{30}$ de degré centigrade; mais il croît avec la profondeur x et atteint $\frac{1}{2}$ degré environ aux profondeurs où l'influence des saisons commence à ne plus se faire sentir [1].

---

[1] Je viens seulement d'avoir connaissance d'observations intéressantes et précises de M. Henri Becquerel, sur la manière dont se sont propagées dans le sol du Jardin des Plantes, *aux petites profondeurs,* les inégalités de température de l'hiver 1890-1891 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* t. CXIII, p. 483; 19 octobre 1891). Ces observations confirment la formule (178) quant aux points sur lesquels elles ont porté, savoir, la manière dont t et x y figurent; et, cependant, les inégalités dont il s'agit n'étaient que bien imparfaitement périodiques.

M. Becquerel en a déduit, pour le terrain expérimenté, la valeur $a^2 = 0,0066$, les unités de longueur et de temps étant le centimètre et la seconde. Avec le mètre et la minute, unités qu'adopte ordinairement Fourier, elle deviendrait

$$a^2 = \frac{0,0066 \times 60}{100^2} = 0,0000396 = (\text{environ})\frac{1}{25000},$$

tandis que la valeur (184) de a, déduite par Poisson de l'observation de l'inégalité *annuelle* dans le sol du Jardin de l'Observatoire, donne, avec les mêmes unités, pour ce terrain de l'Observatoire,

$$a^2 = \frac{(5,1166)^2}{365,25 \times 24 \times 60} = 0,0000498 = (\text{environ})\frac{1}{20000},$$

c'est-à-dire un quart de plus (à raison, peut-être, d'une compacité naturellement croissante avec la profondeur). M. Becquerel a constaté d'ailleurs, dans le même travail, que le degré d'humidité du terrain influe beaucoup sur ce coefficient a^2.

Digitized by Google

QUINZIÈME LEÇON.

PROBLÈME GÉNÉRAL DU REFROIDISSEMENT : ÉTUDE DU CAS OU IL Y A UN POTENTIEL DES FLUX DE CHALEUR.

119. Réduction approchée des équations du refroidissement simple à un système d'équations différentielles linéaires, homogènes et à coefficients constants. — Les questions les plus complexes de la théorie analytique de la chaleur se ramenant aux deux problèmes fondamentaux du refroidissement simple et des températures stationnaires, il y a lieu maintenant d'aborder ces problèmes. Commençons par celui du refroidissement. Alors l'annulation, dans les équations (150), (151), (152) (p. 202), de tous les termes où u ne figure pas, savoir de S, Lu_e, S_1, ku_e, Δ, donne à ces équations les formes suivantes, homogènes en u ou ses dérivées,

$$(187) \qquad C\frac{du}{dt} = \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz} - Lu,$$

$$(188) \qquad \text{(à la surface limite)} \qquad F_n + ku = 0,$$

$$(189) \qquad \text{(aux surfaces séparatives)} \qquad u = u', \qquad F_n + F_{n'} = 0,$$

où les flux F_x, F_y, F_z, F_n, $F_{n'}$ sont, comme on sait, des fonctions linéaires homogènes des trois dérivées $\frac{du}{d(x, y, z)}$, et où F_n, $F_{n'}$, aux surfaces, égalent les sommes des trois produits respectifs de F_x, F_y, F_z par les cosinus directeurs de la normale dn ou dn' y aboutissant, émanée d'un point voisin intérieur des corps étudiés.

Pour nous renseigner sur la forme de l'intégrale qu'admet un pareil système d'équations, à partir d'une valeur *initiale* de t où l'inconnue u égalait une fonction arbitraire donnée $f(x, y, z)$, nous aurons recours au système d'équations simplement différen-

Digitized by Google

tielles, linéaires et à coefficients constants, qui, dans la XIIe Leçon (p. 180), nous a paru propre à remplacer avec une approximation illimitée le système aux dérivées partielles proposé, et nous a permis de nous représenter d'instant en instant la variation de la fonction u en chaque point (x, y, z).

Nous avons, à cet effet, substitué à l'ensemble donné de corps un nombre prodigieux de points fixes (x, y, z) très rapprochés les uns des autres, pris dans l'intérieur de ces corps ou sur leur surface, abstraction faite de minces couches, les séparant du milieu extérieur ou les uns des autres, aux limites desquelles s'appliquent les conditions spéciales (188) et (189). Et nous avons vu comment l'équation indéfinie (187) permettait d'évaluer, pour chacun de ces points, la vitesse $\frac{du}{dt}$ de variation de sa température, en fonction des valeurs u actuelles tant de cette température que de celles des points environnants, celles-ci s'en éliminant d'ailleurs, grâce aux conditions adjointes (188) et (189), qui rendent possible de les exprimer linéairement au moyen des valeurs de u à l'intérieur ou à la surface, quand il s'agit de points appartenant aux couches limites ou séparatives qu'on exclut.

Soient donc :

n, le nombre immense des points choisis (x, y, z), vraiment intérieurs aux corps et n'appartenant pas au dedans des couches limites ou interposées;

$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ les températures existant en ces points à l'époque t quelconque;

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ les capacités calorifiques du corps pour la chaleur aux mêmes points, et $A_1, B_1, D_1, \ldots, A_2, B_2, D_2, \ldots, A_3, B_3$, etc., des coefficients variables d'un point à l'autre, mais constants en chaque endroit ou indépendants de t, formés avec les coefficients de conductibilité ou leurs dérivées premières en x, y, z, et avec les coefficients entrant dans les expressions des dérivées premières ou surtout secondes de u en x, y, z au moyen des différences de valeurs de u entre points voisins.

Il viendra, pour suppléer aux équations (187), (188) et (189) du problème, *sous la condition que ces températures $u_1, u_2, \ldots, u_n$ resteront, à toute époque, très peu différentes les unes des*

Digitized by Google

autres pour les points très voisins, un système d'équations simplement différentielles du type

$$(190)\qquad \begin{cases} C_1 \dfrac{du_1}{dt} = A_1 u_1 + B_1 u_2 + D_1 u_3 + \ldots, \\ C_2 \dfrac{du_2}{dt} = A_2 u_1 + B_2 u_2 + D_2 u_3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_n \dfrac{du_n}{dt} = A_n u_1 + B_n u_2 + D_n u_3 + \ldots. \end{cases}$$

Comme les équations (187), (188), (189) ne contiennent aucun terme indépendant de u ou de ses dérivées, le système (190) n'aura également que des termes en $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ou leurs dérivées premières par rapport à t.

120. Rappel de la forme que présente l'intégrale générale de ce système. — On sait que l'intégrale générale d'un pareil système se forme par l'addition ou superposition de *solutions simples,* dont on essaie de composer chacune en y prenant pour $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les produits de n constantes M, N, P, ... par une même exponentielle e^{rt}. La substitution de ces valeurs dans le système (190) transforme celui-ci en un système de n équations du premier degré, sans seconds membres,

$$(191)\qquad \begin{cases} (A_1 - C_1 r)M + B_1 N + D_1 P + \ldots = 0, \\ A_2 M + (B_2 - C_2 r)N + D_2 P + \ldots = 0, \\ A_3 M + B_3 N + (D_3 - C_3 r)P + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

entre les n constantes M, N, P, ..., avec la $n+1^{\text{ième}}$ constante r introduite linéairement dans un des coefficients de chaque équation. Or ce système (191), qu'il s'agit de vérifier *sans annuler identiquement les n constantes* M, N, P, ..., est, comme on sait, incompatible, sauf quand on choisit la $n+1^{\text{ième}}$ constante r de manière à annuler le déterminant du système, en posant ainsi ce qu'on appelle l'*équation caractéristique*,

$$(192)\qquad \begin{vmatrix} A_1 - C_1 r, & B_1, & D_1, & \ldots \\ A_2, & B_2 - C_2 r, & D_2, & \ldots \\ A_3, & B_3, & D_3 - C_3 r, & \ldots \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Digitized by Google

Et alors le système (191), devenu indéterminé, ne définit plus que les rapports mutuels des constantes M, N, P, ..., pour lesquelles on pourra prendre, si l'on veut, les valeurs proportionnelles qui seront les plus commodes, mais en multipliant finalement par une constante arbitraire c toute la solution simple, c'est-à-dire les valeurs Me^{rt}, Ne^{rt}, Pe^{rt}, ... de u_1, u_2, u_3, ...

Or, le déterminant qui constitue le premier membre de (192) a visiblement pour son premier terme, produit des éléments $A_1 - C_1 r$, $B_2 - C_2 r$, $D_3 - C_3 r$, ..., placés en diagonale, un polynome de $n^{\text{ième}}$ degré en r, dont la partie la plus élevée est $\pm C_1 C_2 \ldots C_n r^n$, et, pour ses autres termes, des polynomes en r de degrés moindres.

C'est donc une équation du $n^{\text{ième}}$ degré, admettant toujours n racines réelles ou imaginaires, simples ou multiples, dont chacune compte dans le nombre n pour autant que l'indique son degré de multiplicité.

Si l'équation caractéristique a toutes ses racines réelles et inégales, appelons-les respectivement $-m_1$, $-m_2$, ..., $-m_n$ (sans rien préjuger encore touchant les signes des quantités m) : et désignons par $M_1, N_1, P_1, \ldots$; $M_2, N_2, P_2, \ldots$; ...; $M_n, N_n, P_n, \ldots$; les systèmes de valeurs de M, N, P, ... qui leur correspondent; enfin, par $c_1, c_2, \ldots, c_n$, les constantes arbitraires qu'on introduira comme facteurs, dans les n solutions simples correspondantes. On sait qu'alors l'intégrale générale du système (190) résulte de la superposition de ces n solutions simples, ou que l'on a

$$(193)\quad \left\{\begin{array}{l} u_1 = c_1 M_1 e^{-m_1 t} + c_2 M_2 e^{-m_2 t} + \ldots + c_n M_n e^{-m_n t}, \\ u_2 = c_1 N_1 e^{-m_1 t} + c_2 N_2 e^{-m_2 t} + \ldots + c_n N_n e^{-m_n t}, \\ u_3 = c_1 P_1 e^{-m_1 t} + c_2 P_2 e^{-m_2 t} + \ldots + c_n P_n e^{-m_n t}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

On peut évidemment condenser toutes ces formules en celle-ci,

$$(194)\qquad u = \sum c\, U e^{-mt},$$

où il est entendu que, dans chaque terme de la somme $\sum$, les valeurs M, N, P, ... de U varient d'un point à l'autre, ou avec x, y, z, mais que m et l'arbitraire c sont les mêmes en tous les points du système.

Digitized by Google

Quand il y a des valeurs de r imaginaires, qui vont alors par couples de la forme $-m \pm \mu\sqrt{-1}$, on sait que, dans les solutions simples correspondantes, les coefficients M, N, P, ... sont également conjugués et que, si on les affecte de facteurs communs arbitraires, mais également conjugués aussi, les résultats sont réels, chaque couple de racines conjuguées donnant dans la formule (194), à la place de la partie imaginaire correspondante, *deux* termes doubles, dont chacun est de la forme

$$ce^{-mt}(\mathrm{U}\cos\mu t + \mathrm{V}\sin\mu t), \tag{195}$$

avec U, V variables d'un point (x, y, z) à un autre. D'ailleurs cette forme de la solution simple comprend la précédente $c\mathrm{U}e^{-mt}$, à laquelle la réduit l'annulation de la partie imaginaire μ de la racine.

Enfin, si la racine $-m$, ou le couple de racines $-m \pm \mu\sqrt{-1}$, au lieu d'être simples, atteignent un degré quelconque p de multiplicité, on sait que, dans les p ou $2p$ solutions simples où elles figurent, les coefficients U, V se trouvent remplacés par des polynomes en t, qui sont : l'un ou les uns, dans la première solution simple ou le premier couple de solutions simples, de degré zéro, c'est-à-dire identiques aux coefficients U ou V du cas précédent; un autre ou d'autres, dans la deuxième solution simple ou le deuxième couple de solutions simples, du premier degré au plus; le suivant ou les deux suivants, dans la troisième solution simple ou le troisième couple de solutions simples, du second degré au plus; et ainsi de suite, jusqu'à des polynomes en t du degré $p-1$ au plus. Les nouvelles solutions simples ont ainsi la forme

$$ce^{-mt}[(\mathrm{U} + \mathrm{U}'t + \mathrm{U}''t^2 + \ldots)\cos\mu t + (\mathrm{V} + \mathrm{V}'t + \mathrm{V}''t^2 + \ldots)\sin\mu t], \tag{196}$$

avec les $2p$ coefficients (au plus) U, U′, U″, ..., V, V′, V″, ... variables d'un point à l'autre, ou en fonction de x, y, z, et ne s'annulant jamais tous à la fois identiquement, c'est-à-dire en tous les points du système, ni n'étant jamais tous respectivement proportionnels dans deux solutions simples [1].

---

[1] *Voir*, relativement à cette intégration d'un système comme (190), les nos 407* à 412* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, second fascicule, p. 276* et suivantes).

Digitized by Google

L'intégrale du système (190) est donc généralement de la forme

$$(197)\quad \left\{ \begin{aligned} u = \sum ce^{-mt}[&(U + U't + U''t^2 + \ldots)\cos\mu t \\ &+ (V + V't + V''t^2 + \ldots)\sin\mu t]. \end{aligned} \right.$$

121. Conclusion qui s'en déduit, touchant l'expression générale des températures dans le problème du refroidissement. — Dans l'expression précédente (197), les modules $\sqrt{m^2 + \mu^2}$ des racines r qui ont servi à former les divers termes ne sont pas tous du même ordre de grandeur. La plupart seront très grands, indéfiniment croissants même avec le nombre n des points choisis dans le système de corps; car il importe d'observer que les coefficients A_1, B_1, D_1, ... qui ne sont pas nuls, ou qui figurent effectivement dans les équations (190), atteignent des grandeurs énormes et deviennent infinis avec n, c'est-à-dire avec l'inverse de l'espacement moyen des points. En effet, les seconds membres de (190) proviennent, en majeure partie, de termes de (187) où entraient linéairement les dérivées premières et surtout secondes de u en x, y, z, dérivées qu'on a remplacées par des rapports de différences finies comme $u_2 - u_1$, $u_3 - u_1$, ..., ou de combinaisons linéaires de ces différences, aux distances très petites, comme $x_2 - x_1$, ou $y_2 - y_1$, ou $z_2 - z_1$, ou $x_3 - x_1$, ..., séparant suivant les sens des x, y, z les points correspondants, ou aux produits de deux de ces distances. On a donc introduit ainsi des dénominateurs s'évanouissant avec l'espacement des points voisins et qui, se retrouvant évidemment dans les coefficients A_1, B_1, D_1, ..., A_2, B_2, ... les rendent indéfiniment croissants. Heureusement que ceux-ci seront, comme on voit aussi, de signes variés, et ne feront pas nécessairement les seconds membres de (190) de l'ordre de grandeur de leurs termes mêmes.

Donc, l'équation (192) en r a ses coefficients très grands, sauf celui du terme en r^n, qui est $\pm C_1 C_2 C_3 \ldots C_n$, et qu'on réduirait à l'unité positive ou négative en divisant préalablement chacune des équations (191) par la valeur de C qui y figure. Par suite, cette équation (192) doit avoir la plupart de ses racines d'un module $\sqrt{m^2 + \mu^2}$ indéfiniment croissant avec n.

Or, observons que les solutions simples fournies par les très fortes racines r, ayant dans toutes leurs parties le facteur

Digitized by Google

$e^{-mt}\cos\mu t$ ou le facteur $e^{-mt}\sin\mu t$, varient très vite avec t; car la dérivée de ces facteurs est généralement de l'ordre même de leur produit par le plus grand des nombres m, μ, ou par $\sqrt{m^2+\mu^2}$. Ainsi, ces termes correspondant à de très fortes racines r donnent, quand on les prend seuls, des températures u très rapidement variables sur place, et feraient très grand, de l'ordre de $u\sqrt{m^2+\mu^2}$, le premier membre $C\frac{du}{dt}$ de l'équation (187), aux divers points choisis (x, y, z) du corps, s'ils entraient en proportion notable dans la solution cherchée. D'où il suit que ces termes font aussi u très rapidement changeant d'un point aux points voisins; car, si leur variation avec x, y, z était graduelle, ou les différences comme $u_2 - u_1$, $u_3 - u_1$, ..., de l'ordre des espacements correspondants, $x_2 - x_1$, ou $y_2 - y_1$, ..., suivant les axes, les seconds membres de (190), transformés alors très approchés du second membre de (187) comparable à u seulement, ne pourraient pas donner les fortes valeurs de $C\frac{du}{dt}$ dont il s'agit.

Les solutions simples introduites dans (197) par les très grandes racines r expriment donc des valeurs de u variables presque brusquement d'un point aux points voisins. Celles-ci peuvent évidemment se présenter, autant que des valeurs bien continues, dans le système de n points *disjoints* auquel on applique les équations différentielles (190): car rien n'y exprime que les u se rapportant à des points voisins devront s'écarter très peu les uns des autres; et, s'il plaît de leur attribuer des valeurs *initiales* aussi différentes qu'entre points éloignés, la solution générale (197), tenue de les reproduire, le fera naturellement en employant de ces solutions simples en plus grande proportion que les solutions simples à variation moins rapide, c'est-à-dire en leur attribuant des amplitudes c notables. En effet, les solutions simples à variations bien continues, et pour lesquelles m et μ sont finis, doivent donner en général, par leur superposition, des totaux bien continus comme elles.

Mais nous ne considérons pas ici le système (190) dans toute la généralité qu'il comporte. Il n'a d'intérêt pour nous qu'en tant qu'il traduit à très peu près les équations proposées (187) à (189). Or, comme celles-ci impliquent des valeurs de u variables graduel-

Digitized by Google

lement d'un point aux points voisins, c'est seulement *dans cette hypothèse restrictive* que le système (190) en est l'équivalent approché. Les solutions simples du système (190) à variations très rapides sont même *totalement étrangères* à l'équation proposée (187); car les rapports comme $\frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}, \ldots$, qui y figurent au fond, n'ont rien de commun avec les dérivées $\frac{du}{dx}, \ldots$, qui figurent dans (187), les numérateurs n'étant pas très petits ou aptes à devenir des différentielles.

Donc, il faudra ranger les termes de (197) par ordre de grandeur croissante des modules $\sqrt{m^2 + \mu^2}$, ordre qui sera celui des rapidités de variation des solutions simples avec t, ou avec x, y, z, et regarder alors les termes très éloignés, ou correspondant aux très grands modules $\sqrt{m^2 + \mu^2}$, comme ne pouvant entrer, en aucune proportion appréciable, dans une formule de u variable graduellement avec x, y, z, c'est-à-dire dans l'intégrale générale cherchée du système (187), (188), (189). Celle-ci devant cependant être fournie à très peu près par (197), il s'ensuit que le simple fait de graduelle variation de u avec x, y, z dans l'état initial entraînera, pour les termes très éloignés, des coefficients d'amplitude c tellement petits, que ces termes s'évanouiront à la limite où n deviendra infini. Autrement dit, l'expression (197), où tous les termes pouvaient être comparables tant qu'il ne s'agissait que des équations différentielles simultanées (190), *devient une série convergente* dès qu'il est question du système proposé aux dérivées partielles (187), (188), (189).

Et nous reconnaissons ainsi, par une induction à laquelle la suite du cours apportera une confirmation constante :

1° Que l'expression générale de la température, dans le problème du refroidissement, se constitue par l'addition de solutions simples en nombre illimité, sur chacune desquelles l'état initial n'influe qu'en modifiant son coefficient d'amplitude c;

2° Que chacune d'elles est comprise, au coefficient près c, dans la forme

$$(198) \qquad e^{-mt}[(U + U't + U''t^2 + \ldots)\cos\mu t + (V + V't + V''t^2 + \ldots)\sin\mu t],$$

où les constantes m, μ et les fonctions U, V, U', V', U'', V'', ...

Digitized by Google

de x, y, z dépendent du système (187) à (189) d'équations aux dérivées partielles, les fonctions de x, y, z s'y réduisant à U, V dans une première solution simple ou un premier couple de solutions simples (avec U, V non proportionnels alors dans les deux solutions, sans quoi celles-ci ne seraient pas distinctes), mais pouvant (jusqu'à preuve du contraire), dans une seconde solution simple ou un second couple de solutions simples où figurent les deux mêmes nombres m et μ, quand ces solutions existent, être au nombre de quatre, savoir, U, V, U′, V′ (avec U, V, U′, V′ non proportionnels, pour la même raison que ci-dessus, dans deux solutions différentes), puis, parfois encore, dans une troisième solution ou un troisième couple de solutions, être au nombre de six, savoir, U, V, U′, V′, U″, V″, etc.;

3° Enfin que, si l'on range les solutions simples, chacune affectée d'un coefficient arbitraire c, par ordre de grandeur croissante de la quantité $\sqrt{m^2+\mu^2}$, les valeurs attribuées à ces constantes c par tout état initial *continu* en x, y, z convertiront la somme des solutions simples en une série convergente, expression de l'intégrale générale.

Les équations différentielles (190) nous ayant ainsi renseignés, même sans que nous ayons pris la peine de les composer explicitement, sur la forme de l'intégrale générale que nous cherchons, nous demanderons directement aux équations mêmes du problème de nous faire connaître les nombres m, μ, les fonctions U, U′, ..., et le moyen de déterminer les coefficients c d'après l'état initial de la fonction u, état que nous supposerons se produire, par exemple, à l'époque $t = 0$, et être exprimé par une fonction arbitraire donnée $f(x, y, z)$.

122. Recherche plus explicite des solutions simples, dans le cas d'un corps à contexture symétrique ou pourvu d'un potentiel des flux de chaleur. — Notre recherche sur toutes les circonstances indiquées ici aboutira presque complètement, du moins à un point de vue général, dans le cas très étendu des systèmes à contexture symétrique, ou qui admettent un potentiel des flux de chaleur; et le succès de la méthode que nous emploierons sera dû au fait, qu'offre la contexture en question, de l'égalité, deux à deux, des six conductibilités latérales $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$.

Digitized by Google

Cette triple égalité

$$(199) \qquad \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}, \qquad \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F},$$

dans les formules générales (31) (p. 115) de F_x, F_y, F_z, entraînera, en effet, une relation capitale pour le problème traité, entre les flux principaux de chaleur, dans deux modes quelconques de distribution de la température, et les dérivées partielles en x, y, z de celle-ci : *si l'on ajoute les trois produits respectifs des flux, dans chacun des deux modes, par les dérivées correspondantes de la température dans l'autre mode, on obtient deux sommes égales.* Autrement dit, u, v étant deux fonctions quelconques de x, y, z, et F_x, F_y, F_z les trois flux principaux dans une particule lorsque la température y est u, F'_x, F'_y, F'_z les trois flux analogues lorsqu'elle y est v, on obtient l'identité

$$(200) \qquad F_x \frac{dv}{dx} + F_y \frac{dv}{dy} + F_z \frac{dv}{dz} = F'_x \frac{du}{dx} + F'_y \frac{du}{dy} + F'_z \frac{du}{dz}.$$

Elle se vérifie par la substitution, dans le premier membre, des expressions (31) de F_x, F_y, F_z, et, dans le second membre, des expressions analogues de F'_x, F'_y, F'_z. L'excédent du premier membre sur le second est

$$(201) \left\{ \begin{aligned} &(\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_1)\left(\frac{du}{dy}\frac{dv}{dz} - \frac{du}{dz}\frac{dv}{dy}\right) + (\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_1)\left(\frac{du}{dz}\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}\frac{dv}{dz}\right) \\ &\qquad\qquad + (\mathfrak{F} - \mathfrak{F}_1)\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right); \end{aligned} \right.$$

et l'on voit qu'il s'annule bien dans le cas de la triple égalité (199) [1].

123. Ces solutions simples ne contiennent aucun facteur trigonométrique dépendant du temps t. — Grâce à l'identité (200), démontrons, en premier lieu, que le coefficient μ affectant le

---

[1] La relation (200), où F_x, F_y, F_z sont les dérivées, en $\frac{du}{d(x, y, z)}$, d'un potentiel Φ fonction entière, homogène et du second degré de ces variables, n'est pas autre chose que l'application à la théorie de la chaleur de la propriété de réciprocité que possèdent ces fonctions et qui est capitale dans la théorie de l'élasticité. (*Voir*, à ce sujet, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. I, second fascicule, p. 125* à 128*.)

Digitized by Google

temps t dans les facteurs trigonométriques des solutions simples (198) sera essentiellement nul.

Considérons, en effet, une solution simple où il n'y ait pas de polynome en t, solution comme il en existe toujours, ou une, ou deux, suivant que μ est nul ou non. Prenons, en d'autres termes,

$$u = e^{-mt}(\mathrm{U}\cos\mu t + \mathrm{V}\sin\mu t); \tag{202}$$

et, substituant cette valeur dans les équations (187) à (189), appelons, d'une part, $\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n'}$, d'autre part, $\mathcal{F}'_x, \mathcal{F}'_y, \mathcal{F}'_z, \mathcal{F}'_n, \mathcal{F}'_{n'}$, ce que deviennent $\mathrm{F}_x, \mathrm{F}_y, \mathrm{F}_z, \mathrm{F}_n, \mathrm{F}_{n'}$, quand on y remplace u d'abord par U, puis par V. Le premier membre de (187) (p. 229) deviendra, au facteur près e^{-mt} qui se trouvera partout,

$$\mathrm{C}[(-m\mathrm{U}+\mu\mathrm{V})\cos\mu t - (\mu\mathrm{U}+m\mathrm{V})\sin\mu t],$$

et, le second membre,

$$\left(\frac{d\mathcal{F}_x}{dx}+\ldots-\mathrm{LU}\right)\cos\mu t + \left(\frac{d\mathcal{F}'_x}{dx}+\ldots-\mathrm{LV}\right)\sin\mu t.$$

L'équation indéfinie (187), satisfaite aux époques où s'annule $\sin\mu t$ et à celles où s'annule $\cos\mu t$, se dédouble en celles-ci :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{C}(-m\mathrm{U}+\mu\mathrm{V}) &= \frac{d\mathcal{F}_x}{dx}+\frac{d\mathcal{F}_y}{dy}+\frac{d\mathcal{F}_z}{dz}-\mathrm{LU},\\ \mathrm{C}(-\mu\mathrm{U}-m\mathrm{V}) &= \frac{d\mathcal{F}'_x}{dx}+\frac{d\mathcal{F}'_y}{dy}+\frac{d\mathcal{F}'_z}{dz}-\mathrm{LV}. \end{aligned}\right. \tag{203}$$

Les conditions adjointes (188), (189) (même page 229) se dédoublent de même et donnent :

$$\text{(à la surface limite)}\quad \mathcal{F}_n = -k\mathrm{U}, \qquad \mathcal{F}'_n = -k\mathrm{V}; \tag{204}$$

$$\text{(aux surf. séparat.)}\quad \mathrm{U}=\mathrm{U}',\quad \mathrm{V}=\mathrm{V}',\quad \mathcal{F}_n+\mathcal{F}_{n'}=0,\quad \mathcal{F}'_n+\mathcal{F}'_{n'}=0. \tag{205}$$

Cela posé, ajoutons les deux équations indéfinies (203), respectivement multipliées par V et par $-$U. Il viendra, vu la relation (200), évidemment applicable aux $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$, U, V au lieu des F, F', u, v,

$$\left\{\begin{aligned} \mu\mathrm{C}(\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2) &= \frac{d}{dx}(\mathrm{V}\mathcal{F}_x-\mathrm{U}\mathcal{F}'_x)\\ &\quad+\frac{d}{dy}(\mathrm{V}\mathcal{F}_y-\mathrm{U}\mathcal{F}'_y)+\frac{d}{dz}(\mathrm{V}\mathcal{F}_z-\mathrm{U}\mathcal{F}'_z). \end{aligned}\right. \tag{206}$$

Digitized by Google

Multiplions celle-ci par l'élément $d\varpi$ de volume, et intégrons dans toute l'étendue du système, en observant que chaque partie du second membre se convertira en une intégrale prise sur tous les éléments $d\sigma$ tant de la surface limite que des surfaces séparatives. Nous aurons

$$(207)\quad \left\{\begin{aligned} \mu\int_\varpi C(U^2+V^2)\,d\varpi &= \int[\ V(\mathcal{F}_x\cos\alpha+\mathcal{F}_y\cos\beta+\mathcal{F}_z\cos\gamma) \\ &\qquad -U(\mathcal{F}'_x\cos\alpha+\mathcal{F}'_y\cos\beta+\mathcal{F}'_z\cos\gamma)]\,d\sigma \\ &= \int(V\mathcal{F}_n-U\mathcal{F}'_n)\,d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Or, aux surfaces séparatives, les parties de l'intégrale du troisième membre relatives aux deux faces d'un même élément $d\sigma$ donneront pour somme, vu les deux premières relations (205),

$$[V(\mathcal{F}_n+\mathcal{F}_{n'})-U(\mathcal{F}'_n+\mathcal{F}'_{n'})]\,d\sigma,$$

c'est-à-dire zéro, à raison des deux dernières (205). D'autre part, à la surface limite du système, les relations (204) annuleront les éléments correspondants du même troisième membre de (207). Donc il viendra

$$(208)\qquad \mu\int_\varpi C(U^2+V^2)\,d\varpi = 0;$$

et comme U^2+V^2 ne peut devenir ni négatif, ni même nul identiquement [sans faire évanouir la solution simple (202)], on aura nécessairement $\mu = 0$.

Les solutions simples susceptibles de représenter le refroidissement de corps à contexture symétrique sont donc comprises dans la formule

$$(209)\qquad e^{-mt}(U+U't+U''t^2+\ldots).$$

124. Elles ne contiennent non plus aucun facteur algébrique en t. — Pour chaque valeur de m, nous aurons ainsi une solution simple de la forme $e^{-mt}U$. Mais voyons s'il sera possible qu'il en existe une autre, de la forme

$$(210)\qquad u = e^{-mt}(U+Vt),$$

où nous mettons V au lieu de U' pour faire servir à notre démonstration certains calculs précédents, avec leurs notations.

Digitized by Google

Appelons encore $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, ... et $\mathfrak{F}'_x$, $\mathfrak{F}'_y$, ... ce que deviennent F_x, F_y, ... quand on y remplace u par U et par V. La dérivée en t de l'expression (210) de u étant $e^{-mt}[(V - mU) - mVt]$, exprimons que les équations (187) à (189) seront satisfaites, après suppression du facteur commun e^{-mt}, d'abord pour t infiniment petit, puis pour t quelconque. Elles se dédoubleront et donneront, d'une part, les deux équations indéfinies

$$(211)\qquad \left\{\begin{aligned} C(V - mU) &= \frac{d\mathfrak{F}_x}{dx} + \frac{d\mathfrak{F}_y}{dy} + \frac{d\mathfrak{F}_z}{dz} - LU, \\ -CmV &= \frac{d\mathfrak{F}'_x}{dx} + \frac{d\mathfrak{F}'_y}{dy} + \frac{d\mathfrak{F}'_z}{dz} - LV, \end{aligned}\right.$$

d'autre part, encore les conditions spéciales (204) et (205). Ajoutons, comme dans le numéro précédent, les équations indéfinies, multipliées par V et par — U. Nous aurons une formule analogue à (206), mais où le premier membre sera simplement CV^2. Et la méthode suivie ci-dessus en déduira l'annulation de l'intégrale $\int_\varpi CV^2 d\varpi$; ce qui exige évidemment que l'on ait $V = 0$ partout.

Donc, *quand deux solutions simples correspondront à une même exponentielle e^{-mt}, il y aura deux fonctions* U *différentes, mais pas de terme algébrique en t.*

On démontre de même, plus généralement, qu'il n'existe aucune solution simple de la forme

$$(212)\qquad u = e^{-mt}(W + \ldots + Ut^{q-1} + Vt^q).$$

En effet, celle-ci donnerait

$$\frac{du}{dt} = e^{-mt}[(-mW + \ldots) + \ldots + (qV - mU)t^{q-1} - mVt^q];$$

et, en appelant $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, ..., et $\mathfrak{F}'_x$, $\mathfrak{F}'_y$, ... ce que deviennent F_x, F_y, ... quand on y remplace u par U et par V, la vérification des équations (187) à (189) exigerait, comme on sait, après suppression du facteur commun e^{-mt}, l'égalité, dans les deux membres, du coefficient de chaque puissance de t. Il viendrait, en particulier, pour les

Digitized by Google

puissances t^{q-1} et t^q,

$$(213)\qquad \left\{\begin{aligned} C(qV - mU) &= \frac{d\mathfrak{F}_x}{dx} + \ldots - LU, \\ -CmV &= \frac{d\mathfrak{F}'_x}{dx} + \ldots - LV, \end{aligned}\right.$$

toujours avec les conditions spéciales (204), (205). Et la méthode précédente donnerait

$$(214)\qquad q\int_{\varpi} CV^2 d\varpi = 0.$$

Or, l'exposant q est supérieur à zéro dans (212). Donc on aura $V = 0$, et ensuite, de proche en proche, pour les mêmes raisons, $U = 0, \ldots$, jusqu'à ce que toute puissance de t autre que t^0 ait disparu de la solution simple.

Il suit des démonstrations précédentes que, dans l'intégrale générale (197) du système des n équations différentielles (190) formé comme on l'a fait, à toute racine $-m$ ou à tout couple $-m \pm \mu\sqrt{-1}$ de racines de l'équation caractéristique, finies ou non indéfiniment croissantes avec n, il correspond des fonctions $U', U'', U''', \ldots$ et des valeurs de μ, ou nulles, ou tendant vers zéro quand le nombre n des points grandit; et, cela, pour tout degré de multiplicité des racines qui ne croît pas indéfiniment. Car si les valeurs en question de μ, U', U'', U''', ..., différaient de zéro à la limite, ou pour n infini, elles appartiendraient alors à des solutions simples du système (187), (188) et (189) aux dérivées partielles : ce que nous venons de démontrer n'avoir pas lieu.

Mais peut-il arriver que le degré de multiplicité croisse indéfiniment avec n, pour une racine $-m$ ou $-m \pm \mu\sqrt{-1}$, finie, c'est-à-dire d'un module moindre qu'une grandeur assignée? Les considérations précédentes ne conduisent pas à le penser. Car, dès que n a dépassé une certaine limite, ou dès que les points matériels pour lesquels on forme le système d'équations différentielles (190) sont assez rapprochés les uns des autres, toutes les racines de l'ordre de grandeur en question, et les fonctions $U, U', \ldots, V, V', \ldots$ correspondantes, doivent avoir déjà très sensiblement atteint leurs limites, alors que n et, à plus forte raison, les degrés de multiplicité sont encore finis. Il ne paraît donc pas

Digitized by Google

admissible qu'il vienne, lors des accroissements ultérieurs de n, s'intercaler entre ces racines de nouvelles racines, ou s'adjoindre, pour une même racine, de nouvelles formes distinctes des fonctions U, U′, ..., V, V′, ...; ce qui reviendrait à accroître les degrés de multiplicité. Aussi n'y a-t-il pas, en Physique mathématique, d'exemple d'une infinité de formes distinctes pour la fonction U de x, y, z correspondant à une même racine $-m$ de l'équation caractéristique. Et toujours l'expression (197) y devient la série convergente, à termes ordonnables par groupes *finis* d'importance décroissante, que les réflexions du n° **121** nous ont fait admettre (p. 236).

125. Les exponentielles e^{-mt} sont essentiellement décroissantes. — Toutes les solutions simples que nous aurons à calculer étant de la forme

$$u = e^{-mt}\mathrm{U}, \tag{215}$$

les équations (187), (188), (189) deviendront, si $\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z, \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n'}$ désignent toujours les résultats de la substitution de U à u dans $\mathrm{F}_x, \mathrm{F}_y, \mathrm{F}_z, \mathrm{F}_n, \mathrm{F}_{n'}$,

$$-m\mathrm{CU} = \frac{d\mathcal{F}_x}{dx} + \frac{d\mathcal{F}_y}{dy} + \frac{d\mathcal{F}_z}{dz} - \mathrm{LU}, \tag{216}$$

$$\text{(à la surface limite)}\quad \mathcal{F}_n = -k\mathrm{U}, \tag{217}$$

$$\text{(sur les surfaces séparat.)}\quad \mathrm{U} = \mathrm{U}', \qquad \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n'} = 0. \tag{218}$$

Multiplions l'équation indéfinie (216) par l'élément de volume $d\varpi$, et par une fonction V de x, y, z continue dans tout l'intérieur du système, mais d'ailleurs quelconque, comme serait, par exemple, la fonction U elle-même, ou la fonction analogue de x, y, z, que j'appellerai U′, multipliant l'exponentielle, appelée de même $e^{-m't}$, dans toute autre solution simple. Puis intégrons les résultats pour tout le volume ϖ du système, après avoir remplacé, au second membre, les trois produits $\mathrm{V}\,\frac{d(\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z)}{d(x, y, z)}$ par les différences équivalentes $\frac{d.(\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z)\mathrm{V}}{d(x, y, z)} - (\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z)\,\frac{d\mathrm{V}}{d(x, y, z)}$, afin de pouvoir effectuer, sur les premiers termes de ces dédoublements, une intégration donnant des intégrales prises sur les surfaces

Digitized by Google

limite ou séparatives. Ces intégrales de surface seront, en tout,

$$\int V(\mathcal{F}_x \cos\alpha + \mathcal{F}_y \cos\beta + \mathcal{F}_z \cos\gamma)d\sigma, \quad \text{ou} \quad \int V\mathcal{F}_n d\sigma.$$

A cause de la continuité de V à la traversée des surfaces séparatives, les deux éléments $V\mathcal{F}_n d\sigma$, relatifs aux deux faces d'un même fragment $d\sigma$ de ces surfaces, auront pour somme $V(\mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n'})d\sigma$, c'est-à-dire zéro, en vertu de la dernière condition (218); et il ne restera que les éléments relatifs à la surface limite, où $\mathcal{F}_n$ recevra de la relation spéciale (217) la valeur $-kU$. Les résultats obtenus consisteront par suite, après changement de tous les signes, dans la formule

$$(219)\quad \left\{ \begin{aligned} m\int_\varpi CUV\,d\varpi = \int_\sigma kUV\,d\sigma + \int_\varpi \left(\mathcal{F}_x \frac{dV}{dx} + \mathcal{F}_y \frac{dV}{dy} + \mathcal{F}_z \frac{dV}{dz}\right) d\varpi \\ + \int_\varpi LUV\,d\varpi. \end{aligned} \right.$$

Prenons, en premier lieu, $V = U$; et observons qu'alors l'expression $\mathcal{F}_x \frac{dV}{dx} + \mathcal{F}_y \frac{dV}{dy} + \mathcal{F}_z \frac{dV}{dz}$ devient le polynome essentiellement positif, et homogène du second degré en $\frac{dU}{d(x, y, z)}$, que nous avons appelé 2Φ (p. 117) quand on y remplaçait U par u, et que nous continuerons à appeler de même 2Φ, malgré la substitution de U à u. Ce polynome n'est autre, en effet, lorsqu'il y a un potentiel Φ des flux de chaleur, que le double de celui-ci. Il viendra donc, même si nous sortons du cas des milieux à contexture symétrique, et qu'il n'y ait pas de potentiel,

$$(220)\qquad m\int_\varpi CU^2\,d\varpi = \int_\sigma kU^2\,d\sigma + 2\int_\varpi \Phi\,d\varpi + \int_\varpi LU^2\,d\varpi.$$

Comme l'intégrale définie du premier membre est essentiellement supérieure à zéro, que toutes celles du second membre le sont également, sauf dans la triple hypothèse $k = 0$, $L = 0$, $U = \text{const.}$, il en résulte que les valeurs de m, rapports de quantités positives, sont supérieures à zéro, à part la valeur spéciale qui serait nulle si l'on avait à la fois $k = 0$, $L = 0$ et $U = \text{const.}$, c'est-à-dire dans un système athermane et imperméable à la chaleur, ayant reçu une température constante.

Digitized by Google

Donc, *les exponentielles* e^{-mt} *sont, toutes, décroissantes,* comme on pouvait, du reste, le déduire du fait, démontré au n° 100 (p. 187), que l'intégrale définie $\int_{\varpi} C u^2 d\varpi$ est toujours décroissante dans le problème du refroidissement. En effet, quand l'expression effective de u se réduit à la solution simple $c e^{-mt} U$, cette intégrale positive a pour valeur $c^2 e^{-2mt} \int_{\varpi} C U^2 d\varpi$: elle est donc proportionnelle au carré de l'exponentielle e^{-mt} et ne peut être décroissante que si celle-ci l'est elle-même.

On remarquera que cette démonstration et les formules précédentes, à partir de (215), ne supposent nullement l'existence d'un potentiel des flux de chaleur. Elles s'appliquent donc aux solutions simples de la forme $e^{-mt} U$, quelle que soit la contexture du système, symétrique ou non.

Digitized by Google

SEIZIÈME LEÇON.

SUITE : MÉTHODE D'ÉLIMINATION DE FOURIER; ÉTAT PÉNULTIÈME DU REFROIDISSEMENT.

126. Le produit de deux solutions simples a sa valeur moyenne dans tout le système égale à zéro. — Prenons maintenant dans (219), pour la fonction V, le facteur dépendant de x, y, z, dans une solution simple, $e^{-m't}U'$, à exponentielle $e^{-m't}$ *différente* de la proposée e^{-mt}. Il viendra

$$(221)\quad \left\{\begin{aligned} & m\int_{\varpi} CUU'\,d\varpi \\ & = \int_{\sigma} kUU'\,d\sigma + \int_{\varpi}\left(\mathcal{F}_x\frac{dU'}{dx} + \mathcal{F}_y\frac{dU'}{dy} + \mathcal{F}_z\frac{dU'}{dz}\right)d\varpi + \int_{\varpi} LUU'\,d\varpi. \end{aligned}\right.$$

Les premier et dernier termes du second membre sont symétriques en U et U'. Or le terme moyen le sera également, en $\frac{dU}{d(x,y,z)}$ et $\frac{dU'}{d(x,y,z)}$, s'il y a un potentiel des flux de chaleur, ou que la contexture soit symétrique, comme nous l'admettrons. En effet, la formule (200) montre alors que l'échange de l'accent entre les lettres $\mathcal{F}$ et U ne modifie pas l'élément de l'intégrale constituant cet avant-dernier terme de (221). Donc la relation (221), mais supposée obtenue en partant de la solution simple $e^{-m't}U'$, donnerait le même second membre, tandis que le premier serait $m'\int_{\varpi} CU'U\,d\varpi$. Et, en prenant la différence des deux résultats, on aurait

$$(222)\qquad (m'-m)\int_{\varpi} CUU'\,d\varpi = 0, \qquad \text{ou} \qquad \int_{\varpi} CUU'\,d\varpi = 0.$$

Digitized by Google

On peut étendre cette dernière formule,

$$\int_{\varpi} \mathrm{C}\,\mathrm{U}\,\mathrm{U}'\,d\varpi = 0, \tag{223}$$

aux facteurs U, U′ caractérisant deux solutions simples qui correspondraient à une même exponentielle e^{-mt}. Si U, V désignent leurs expressions telles qu'on les donne, il suffira de remplacer la seconde par une combinaison linéaire des deux, en posant $\mathrm{U}' = \mathrm{V} + a\mathrm{U}$; et alors la relation (223) sera vérifiée, pourvu que l'on ait $\int_{\varpi} \mathrm{CU}(\mathrm{V} + a\mathrm{U})\,d\varpi = 0$, ou

$$a\int_{\varpi} \mathrm{C}\,\mathrm{U}^2\,d\varpi + \int_{\varpi} \mathrm{CUV}\,d\varpi = 0,$$

équation d'où se déduira la valeur à prendre pour la constante a.

S'il y avait, en outre, une troisième solution simple, ou une troisième fonction, W, pour la même exponentielle e^{-mt}, on la remplacerait de même par une de ses combinaisons linéaires,

$$\mathrm{U}'' = \mathrm{W} + a\mathrm{U} + b\mathrm{U}',$$

avec les deux précédentes; et alors on obtiendrait les deux relations voulues $\int_{\varpi} \mathrm{C}(\mathrm{U}, \mathrm{U}')\mathrm{U}''\,d\varpi = 0$, en posant

$$\int_{\varpi} \mathrm{C}(\mathrm{U}, \mathrm{U}')(\mathrm{W} + a\mathrm{U} + b\mathrm{U}')\,d\varpi = 0,$$

c'est-à-dire, vu l'égalité déjà obtenue $\int_{\varpi} \mathrm{C}\,\mathrm{U}\,\mathrm{U}'\,d\varpi = 0$,

$$a\int_{\varpi} \mathrm{CU}^2\,d\varpi + \int_{\varpi} \mathrm{CUW}\,d\varpi = 0, \qquad b\int_{\varpi} \mathrm{C}\,\mathrm{U}'^2\,d\varpi + \int_{\varpi} \mathrm{C}\,\mathrm{U}'\,\mathrm{W}\,d\varpi = 0,$$

équations qui font connaître les valeurs à prendre pour a, b.

On procéderait encore de même, si une quatrième solution simple X était à remplacer par une autre, $\mathrm{U}''' = \mathrm{X} + a\mathrm{U} + b\mathrm{U}' + c\mathrm{U}''$, propre à annuler les trois intégrales $\int_{\varpi} \mathrm{C}(\mathrm{U}, \mathrm{U}', \mathrm{U}'')\mathrm{U}'''\,d\varpi$: ce qui donnerait trois équations du premier degré en a, b, c, où les inconnues seraient encore séparées; et ainsi de suite.

En général, que l'exponentielle en t soit la même ou soit diffé-

Digitized by Google

rente, nous pourrons donc admettre la relation (223) entre les facteurs U et U′, fonctions de x, y, z, qui constituent, multipliées par cette exponentielle, deux solutions simples distinctes. Or, si l'on décompose le système en éléments $d\varpi$ *d'égale capacité totale* $Cd\varpi$ pour la chaleur, la moyenne arithmétique du produit UU′ dans ces éléments sera évidemment proportionnelle à l'intégrale $\int_{\varpi} CUU' d\varpi$. La relation (223) signifie donc que cette valeur moyenne est nulle. Mais celle-ci est elle-même proportionnelle à celle du produit des deux solutions simples, $ce^{-mt}U$, $c'e^{-m't}U'$, puisque les facteurs autres que U et U′ n'y varient pas d'un point à l'autre. Ainsi la formule (223) exprime, en définitive, que *le produit de deux solutions simples distinctes a sa valeur moyenne dans tout le système égale à zéro.*

Ce produit change donc de signe une ou plusieurs fois ; en sorte que les signes de deux solutions simples quelconques sont tantôt pareils, tantôt différents dans les diverses régions du système ; et autant l'un que l'autre. Toutefois, l'absolue généralité de cette assertion suppose, comme on voit, dans le cas de plusieurs solutions pour une même exponentielle, que les fonctions de x, y, z l'y multipliant sont, à des facteurs constants près, non les premières venues, U, V, W, ..., parmi les fonctions possibles, mais leurs combinaisons linéaires appelées ci-dessus U, U′, U″, ... Il n'y a, par suite, qu'*une seule solution simple dont le signe puisse être le même dans toute l'étendue du système,* sous pareille réserve (jusqu'à plus ample démonstration) en ce qui concernerait les *adjointes* où figurerait également son exponentielle en t, s'il était possible qu'elle eût de telles adjointes. Nous verrons bientôt que cette propriété d'avoir un signe uniforme caractérise, en effet, une solution simple, *correspondant toujours* à la plus petite valeur de m, et que nous appellerons la *solution simple fondamentale.*

127. L'équation en m a toutes ses racines réelles. — Le système d'équations (216) à (218) (p. 243), qui doit déterminer la fonction U à un facteur constant près, est la traduction en dérivées partielles du système d'équations du premier degré (191) (p. 231). Comme lui, il résulte de l'élimination de l'exponentielle e^{rt} ou e^{-mt}

Digitized by Google

entre les équations à intégrer; et, comme lui, il reste satisfait quand on y multiplie toutes les valeurs (M, N, P, ...) de U par un facteur arbitraire c : preuve qu'il est, lui aussi, *indéterminé* et, par suite (les équations étant en même nombre que les inconnues), *incompatible,* sauf pour les valeurs choisies de r ou de m. Le système d'équations (216) à (218) contient donc implicitement tout ce qu'il faut pour déterminer l'expression proportionnelle de U (ou ses expressions dans le cas singulier de racines m multiples), et, en même temps, pour former en m, qui doit avoir une *infinité* de valeurs, une certaine équation, dès lors *transcendante,* extraite de l'équation caractéristique (192) à la limite $n = \infty$.

Or il suit évidemment, de ce que les valeurs imaginaires $-m \pm \mu\sqrt{-1}$ de r introduisaient, dans les solutions simples, des facteurs trigonométriques $\cos\mu t$ et $\sin\mu t$, dont nous avons démontré l'impossibilité au n° **123** (p. 240), que l'on aura $\mu = 0$, ou que l'équation en m ne comportera que des racines réelles. Mais il est bon de déduire directement ce fait, reconnu déjà par Fourier, de la première équation (222), comme paraît l'avoir fait en premier lieu Poisson.

Supposons donc que les équations (216) à (218) puissent être, pour la figure donnée du système, satisfaites en remplaçant m et U par des expressions imaginaires de la forme $\nu + \mu\sqrt{-1}$ et $V + W\sqrt{-1}$, avec ν, μ, V, W réels. Il est clair que les changements de μ en $-\mu$ et de W en $-W$, revenant à y remplacer simplement $\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$, les laisseraient vérifiées. On aurait donc, *analytiquement,* deux solutions simples distinctes, en prenant $m = \nu + \mu\sqrt{-1}$, $U = V + W\sqrt{-1}$ et $m' = \nu - \mu\sqrt{-1}$, $U' = V - W\sqrt{-1}$; ce qui changerait la première équation (222), divisée par $-2\sqrt{-1}$, en celle-ci :

$$\mu \int_{\varpi} C(V^2 + W^2)\, d\varpi = 0.$$

C'est, à la différence près des notations, l'équation (208), d'où nous avons déduit $\mu = 0$.

128. Méthode d'élimination de Fourier, pour le calcul des coefficients c d'amplitude des diverses solutions simples, d'après l'état initial. — Fourier a montré comment l'équation (223) permet de

Digitized by Google

déduire, des valeurs *initiales* données

$$(224) \qquad u = f(x, y, z) \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

les divers coefficients d'amplitude c, dans la solution générale

$$(225) \qquad u = \sum c e^{-mt} \mathrm{U}.$$

Celle-ci se réduit, pour l'instant initial $t = 0$, à $u = \sum c\mathrm{U}$. Il faut donc poser

$$(226) \qquad \sum c\mathrm{U} = f(x, y, z), \qquad \text{en tous les points } (x, y, z) \text{ du système.}$$

Multiplions cette équation (226), qui, étant vérifiée en une infinité de points, équivaut à une infinité d'équations du premier degré entre les coefficients inconnus c, par l'une quelconque des fonctions U et par l'élément $\mathrm{C}\,d\varpi$ de capacité calorifique; puis intégrons le résultat dans toute l'étendue du système. Chaque terme du premier membre, à l'exception d'un seul, se trouvera multiplié par une expression de U différente de celle qui y figure déjà, et donnera un résultat de la forme $c\int_\varpi \mathrm{CUU}'\,d\varpi$, nul en vertu de (223). Il ne subsistera donc que le terme $c\mathrm{U}$ contenant déjà le facteur U par lequel on multiplie ; et il viendra simplement

$$(227) \qquad c\int_\varpi \mathrm{CU}^2\,d\varpi = \int_\varpi \mathrm{CU} f(x, y, z)\,d\varpi.$$

Tous les coefficients d'amplitude c sont éliminés de cette manière très simple, à l'exception de celui qu'on veut calculer, et qui se trouve ainsi *séparé* des autres. Il vient donc, en appelant u_0, pour abréger, les valeurs initiales données de u,

$$(228) \qquad c = \frac{\int_\varpi \mathrm{CU}\,u_0\,d\varpi}{\int_\varpi \mathrm{CU}^2\,d\varpi}.$$

L'intégrale générale (225) est, dès lors, complètement explicite ; et l'on remarquera que la formule obligée (228) impose à chaque coefficient c une valeur unique, ou qu'il y a une *seule* manière de

Digitized by Google

développer l'état initial $f(x, y, z)$ sous la forme $\sum cU$, c'est-à-dire, en quelque sorte, de le répartir entre toutes les solutions simples.

D'ailleurs, la marche synthétique suivie ici nous montre, comme résultat tout naturel et vraisemblable, la possibilité de ce développement de la fonction arbitraire $f(x, y, z)$ en une série convergente $\sum cU$. Cette possibilité, confirmée par tous les exemples qui, depuis Fourier, ont été accessibles au calcul effectif, a pu être aussi démontrée directement, dans des cas d'abord assez rares, mais qui, à partir de Cauchy, sont devenus et continuent à devenir, d'une année à l'autre, de moins en moins restreints, grâce aux efforts d'analystes éminents. Mais leurs démonstrations, encore bien incomplètes, sont trop longues et trop difficiles pour que nous nous y arrêtions ici : nous nous contenterons d'en reconnaître, à l'occasion, les cas les plus simples.

Le calcul du dénominateur $\int_\varpi CU^2 d\varpi$ peut souvent être simplifié par un double emploi judicieux de la formule (219) (p. 244).

Imaginons qu'en supprimant une des conditions (217) ou (218), par exemple (217), tout au moins sur un point de la surface σ, on rende le système d'équations donné (216) à (218) compatible, c'est-à-dire susceptible d'être vérifié pour toute valeur de m; et, appelant m' le paramètre m devenu ainsi graduellement variable, admettons qu'on ait réussi à former une fonction continue U' de x, y, z, m', qui se réduise à U quand m' se réduit à m, et qui vérifie les équations (216), (218), où l'on aura mis U' pour U.

Alors la formule (219) pourra être obtenue pour U' comme elle l'a été pour U, avec cette seule différence que le premier terme du second membre y gardera (faute par U' de vérifier partout la condition à la surface limite) sa première expression $-\int_\sigma \mathfrak{F}_n V d\sigma$. Et, si l'on accentue les lettres $\mathfrak{F}$ pour indiquer qu'il s'agit de la fonction U', on aura

$$(229)\left\{\begin{aligned} & m'\int_\varpi CU'V\,d\varpi \\ & = -\int_\sigma \mathfrak{F}'_n V\,d\sigma + \int_\varpi \left(\mathfrak{F}'_x \frac{dV}{dx} + \mathfrak{F}'_y \frac{dV}{dy} + \mathfrak{F}'_z \frac{dV}{dz}\right) d\varpi + \int_\varpi LU'V\,d\varpi. \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

Prenons-y $V = U$, et retranchons alors de (229) la formule (219), où nous aurons fait $V = U'$. Les intégrales de volume, à éléments égaux ou identiques, figurant aux seconds membres, se détruiront; et il viendra, en observant finalement que $\mathcal{F}_n + kU = 0$ à la surface σ,

$$(m' - m)\int_\varpi CUU'\,d\varpi = -\int_\sigma U(\mathcal{F}'_n + kU')\,d\sigma$$

$$= -\int_\sigma U[(\mathcal{F}'_n - \mathcal{F}_n) + k(U' - U)]\,d\sigma.$$

D'où il résulte

$$(230)\qquad \int_\varpi CUU'\,d\varpi = -\int_\sigma U\left(\frac{\mathcal{F}'_n - \mathcal{F}_n}{m' - m} + k\,\frac{U' - U}{m' - m}\right)d\sigma;$$

et, en faisant tendre m' vers m,

$$(231)\qquad \int_\varpi CU^2\,d\varpi = -\int_\sigma U\left(\frac{d\mathcal{F}_n}{dm} + k\,\frac{dU}{dm}\right)d\sigma.$$

En d'autres termes, le calcul de la valeur moyenne de U^2 se trouve ainsi ramené à celui d'expressions prises seulement à la limite σ du système.

129. État pénultième ou régularisé du système. — Ayant ainsi déterminé les amplitudes c avec lesquelles entrent dans l'intégrale générale (225) les diverses solutions simples, supposons que l'état initial n'ait pas été choisi justement de manière à annuler le coefficient c_0 de la première solution simple, celle qui correspond à la plus petite racine, que j'appellerai m_0, de l'équation caractéristique; et admettons, ce qui est le seul cas offert par tous les exemples connus, que cette racine m_0 ne soit pas multiple, ou, plus précisément, qu'il ne lui corresponde qu'une seule solution simple, une seule fonction U, dont la désignation sera U_0 [1].

---

[1] On peut voir, sur ce point difficile de la théorie, aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris (16 octobre 1893, t. CXVII, p. 502), une Note de M. Picard, où l'éminent analyste établit, notamment, la simplicité de la racine m la plus petite, du moins dans le cas d'un corps athermane, homogène et isotrope, à deux coordonnées x, y, et d'un refroidissement *par contact*, où la condition au contour serait, pour chaque solution simple, $U = 0$, ou même, plus généralement, $U = \text{const}$.

La démonstration y est basée sur un mode de raisonnement de M. Schwarz qui

Digitized by Google

Alors demandons-nous ce que deviendra la fonction u, si le temps croît au point de rendre les exponentielles e^{-mt} d'assez petites fractions de leur valeur initiale commune 1. Les divers termes de la série $\sum cUe^{-mt}$ seront loin de décroître dans un même rapport; car si, par exemple, cUe^{-mt} et $c'U'e^{-m't}$ expriment deux termes consécutifs, le rapport du second au premier sera de l'ordre de l'exponentielle évanouissante $e^{-(m'-m)t}$. Donc chaque terme s'efface devant le précédent, pourvu que celui-ci ne soit pas nul, et la série tout entière ne diffère du premier terme, $c_0 e^{-m_0 t} U_0$, que par une très petite fraction de sa valeur. La température u, bien avant de s'annuler physiquement, devient ainsi de la forme

$$u = c_0 e^{-m_0 t} U_0. \tag{232}$$

Alors son mode de distribution aux divers points (x, y, z), exprimé par la fonction U_0, est désormais invariable, indépendant de l'état initial $f(x, y, z)$, et déterminé uniquement par la constitution tant géométrique que physique du système, ainsi que le facteur $e^{-m_0 t}$, qui exprime l'extinction graduelle des températures ainsi régularisées. On voit donc qu'il n'y a pas seulement l'état final $u = 0$ qui soit *ordonné* indépendamment des irrégularités de l'état initial; mais que le phénomène s'harmonise aussi dans sa marche, au point d'être déjà très bien débarrassé de ses primitives inégalités accidentelles, durant une longue période de son évolution, savoir, dès qu'il a sensiblement atteint ce qu'on appelle son *état pénultième*.

C'est ainsi que Fourier a montré, dans le problème du refroidissement et, par suite, dans ceux qu'on y rattache, comment se font ces *établissements de régime,* tenant à la constance des lois

---

prouve, pour le corps à deux coordonnées x, y dont il s'agit, l'existence d'une fonction U de même signe partout à l'intérieur du corps. Il est probable que cette démonstration s'étendrait à bien d'autres cas.

Le point particulier de l'*unicité* de la fonction U qui correspond à la racine m la plus petite est, à la vérité, resté implicite dans cette Note. Mais M. Picard a remarqué, depuis, que le raisonnement de M. Schwarz montre l'impossibilité d'enlever aucun fragment au corps sans faire grandir, par le fait même, la racine m permettant l'existence de la fonction U dans le corps partiel restant; et l'on verra ci-après (à la Note finale du n° 130) que cela prouve bien l'unicité de la fonction U correspondant, dans le corps entier, à la racine m la plus petite.

Digitized by Google

physiques, dont la nature nous offre tant d'exemples, et dont le fait général est une des grandes lois de la Philosophie naturelle.

130. **Uniformité de signe de la solution simple fondamentale.** — La propriété qu'a la solution simple fondamentale, $e^{-m_0 t}U_0$, d'exprimer l'état pénultième, assure à cette solution simple, comme l'a démontré M. Henri Poincaré, le privilège d'avoir même signe dans toute l'étendue du système matériel considéré, à l'exclusion, ainsi qu'on l'a vu (p. 248), de toute autre solution simple.

Supposons, en effet, qu'on eût pris un état initial $f(x, y, z)$ partout positif. Alors la température ne peut, nulle part, s'abaisser jusqu'à zéro avant de s'annuler partout. Car, au moment où elle atteindrait zéro à l'endroit où elle s'abaissera le plus, la particule située à cet endroit, étant entourée de particules plus chaudes, aurait déjà commencé à se réchauffer. Même si elle se trouve à la surface limite, le milieu extérieur (à zéro) ne la refroidirait plus. Ainsi, en imaginant qu'on enceignît cette particule la plus froide d'une surface isotherme à une température égale ou infiniment peu supérieure à zéro, sauf du côté de la surface limite σ, où le milieu extérieur lui-même est à zéro, cette particule recevrait de la chaleur, au lieu d'en perdre comme l'exige l'hypothèse d'un refroidissement poussé jusque-là.

Par conséquent, c'est à la fois dans toute l'étendue du système (et pour t infini, ou asymptotiquement), non dans une de ses régions, que la température pourra devenir nulle, après avoir été initialement positive partout. Or on n'a pas à craindre que cette hypothèse de valeurs initiales u_0 positives fasse disparaître le coefficient c_0, donné par (228), de la solution simple fondamentale : car il faudrait pour cela que l'on eût $\int_\varpi CU_0 u_0 \, d\varpi = 0$; chose qu'on éviterait, même si U_0 changeait de signe dans le corps, en prenant *provisoirement* (c'est-à-dire pour faire la démonstration) u_0 infiniment petit partout où U_0 n'aurait pas, par exemple, le signe de ses plus fortes valeurs. Dans ces conditions, la solution simple fondamentale $c_0 e^{-m_0 t}U_0$, expression infiniment approchée, pour t très grand, de températures partout supérieures à zéro, ne peut être nulle part négative. Donc *la fonction* U_0 *a même signe dans toute l'étendue du système.*

Digitized by Google

Il suit de là qu'on obtiendra la solution simple fondamentale, pour un corps donné, si l'on peut former pour ce corps l'expression asymptotique, ou correspondant aux temps t très grands, des températures consécutives, par exemple, à un échauffement initial *uniforme* (1).

---

(1) Les mêmes raisonnements montrent que, s'il pouvait y avoir un corps où plusieurs solutions simples distinctes, $c_0 U_0 e^{-m_0 t}$, $c'_0 U'_0 e^{-m_0 t}$, $c''_0 U''_0 e^{-m_0 t}$, ..., correspondraient à la racine m_0 la plus petite de l'équation caractéristique :

1° L'une d'elles, $c_0 U_0 e^{-m_0 t}$, donnant sans cesse son signe à u en tous les points du corps, dans l'expression de températures initialement positives partout ou négatives partout, aurait même signe dans tout le corps;

2° On pourrait adopter, comme fonction correspondante U_0, l'expression asymptotique, divisée par son exponentielle e^{-mt}, de u, dans le cas d'une température initiale uniforme 1, et lui subordonner les autres fonctions U'_0, U''_0, ..., comme il a été indiqué (p. 247);

3° Par suite, aucune solution ayant même signe dans tout le corps ne correspondrait, même dans ce cas, aux racines m supérieures à m_0;

4° L'expression asymptotique des températures du corps comporterait une certaine variété, suivant les valeurs (relatives) attribuées par l'état initial aux coefficients, c_0, c'_0, c''_0, ..., des fonctions, U_0, U'_0, U''_0, ..., multipliant toutes l'exponentielle principale $e^{-m_0 t}$;

5° Enfin, les fonctions qui seraient adjointes à U_0, comme U'_0 par exemple, ayant leurs valeurs moyennes nulles, changeraient de signe sur certaines surfaces intérieures; et, si l'on tranchait le corps suivant ces surfaces, en y maintenant désormais la température zéro, qui s'y trouve réalisée dans la solution simple correspondante, le refroidissement de chaque fragment ainsi obtenu admettrait la solution simple dont il s'agit, savoir, $c'_0 U'_0 e^{-m_0 t}$, qui serait même, pour le refroidissement de ce corps partiel, la solution simple fondamentale, ou l'expression asymptotique de u, U'_0 y offrant même signe partout. Donc on aurait pu, *sans rendre le refroidissement plus rapide,* détacher du corps toute la matière extérieure au fragment et refroidir par contact la nouvelle surface, c'est-à-dire lui attribuer une conductibilité extérieure infinie. Une pareille conséquence, presque absurde au point de vue physique, de l'hypothèse de plusieurs solutions simples distinctes pour la plus petite valeur m_0 de m, met bien en lumière la complète invraisemblance de cette supposition.

La remarque de M. Picard, dont j'ai parlé à la fin d'une précédente Note (p. 253), constitue justement la démonstration mathématique de son absurdité, pour le corps à deux coordonnées x, y dont il y est question; car elle montre que toute suppression d'une partie de ce corps fait grandir, pour le fragment restant, la racine m_0. Et elle prouve bien, par le fait même, la non-existence d'une fonction comme U'_0 dans le corps considéré.

En résumé, *quand on trouvera, à un problème posé de refroidissement, une solution simple qui soit unique pour l'exponentielle e^{-mt} y figurant et qui ait signe uniforme dans tout le corps, cette solution simple, à l'exclusion de toute autre, exprimera l'état pénultième, alors bien régularisé, des températures de ce corps.* Or c'est ce qui arrivera dans tous les exemples donnés plus loin.

Digitized by Google

131. La température et ses deux premières dérivées relatives au temps forment, en valeur absolue moyenne, une certaine proportion continue. — Terminons cette étude générale du refroidissement d'un système à contexture symétrique, par la démonstration d'un théorème qui offre quelques analogies avec ceux des forces vives et du viriel en Mécanique rationnelle.

Multiplions l'équation indéfinie (187) (p. 229), non pas par $u\,d\varpi$, comme dans le n° **100** (p. 187), mais par $2\frac{du}{dt}d\varpi$, et intégrons dans toute l'étendue ϖ du système, après avoir dédoublé les trois produits $\frac{du}{dt}\frac{d(F_x, F_y, F_z)}{d(x, y, z)}$ en

$$\frac{d.\frac{du}{dt}(F_x, F_y, F_z)}{d(x, y, z)} - (F_x, F_y, F_z)\frac{d^2u}{dt\,d(x, y, z)}$$
$$= \frac{d.\frac{du}{dt}(F_x, F_y, F_z)}{d(x, y, z)} - \frac{d\Phi}{d\frac{du}{d(x, y, z)}}\frac{d\frac{du}{d(x, y, z)}}{dt}.$$

Les intégrales détachées aux surfaces limite et séparatives, savoir, en tout,

$$2\int\frac{du}{dt}(F_x\cos\alpha + F_y\cos\beta + F_z\cos\gamma)\,d\sigma, \quad \text{ou} \quad 2\int\frac{du}{dt}F_n\,d\sigma,$$

donneront, sur les deux côtés ensemble de chaque élément d'une surface séparative, en vertu des deux conditions (189) vérifiées à toute époque, $2\frac{du}{dt}(F_n + F_{n'})d\sigma$, ou zéro, et, à la surface limite σ, en vertu de (188), $-2\int_\sigma ku\frac{du}{dt}d\sigma$, ou $-\frac{d}{dt}\int_\sigma ku^2 d\sigma$. Il viendra évidemment

$$(233)\quad 2\int_\varpi C\frac{du^2}{dt^2}d\varpi = -\frac{d}{dt}\left(\int_\sigma ku^2 d\sigma + 2\int_\varpi \Phi\,d\varpi + \int_\varpi Lu^2 d\varpi\right).$$

C'est la formule cherchée.

Son rapprochement avec celle du n° **100**, notée (127) (p. 187), donne

$$2\int_\varpi C\frac{du^2}{dt^2}d\varpi = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int_\varpi Cu^2 d\varpi,$$

Digitized by Google

ou

$$\int_{\varpi} C\left(2\frac{du^2}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{d^2.u^2}{dt^2}\right)d\varpi = 0,$$

c'est-à-dire, après les deux différentiations indiquées sur u^2,

$$(234) \qquad \int_{\varpi} C\left(\frac{du^2}{dt^2} - u\frac{d^2u}{dt^2}\right)d\varpi = 0.$$

Cette relation exprime que la valeur moyenne, dans tout le système, du carré $\frac{du^2}{dt^2}$ égale celle du produit $u\frac{d^2u}{dt^2}$, ou, *si l'on veut*, qu'en valeur absolue *moyenne* la dérivée première $\frac{du}{dt}$ de la température est moyenne proportionnelle entre la température elle-même u et sa dérivée seconde $\frac{d^2u}{dt^2}$. La proportion continue que donnent, dans chaque solution simple, les trois termes u, $-\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, respectivement proportionnels à 1, m, m^2, s'étend donc, d'une certaine manière, à la solution générale.

On le vérifie, du reste, en remplaçant u par son développement $\sum ce^{-mt}U$, et $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$ par les séries analogues que donne celle-là, différentiée deux fois terme à terme, puis en observant que les deux développements des produits $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ et $u\frac{d^2u}{dt^2}$ ne diffèrent que par des termes où figurent les produits UU', nuls en moyenne.

Digitized by Google

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

SUITE : APPLICATION A L'ARMILLE; TEMPÉRATURES STATIONNAIRES ET REFROIDISSEMENT DE CE CORPS.

132. Application à l'armille; équations du problème. — C'est sur l'exemple de l'armille, le plus simple et le plus suggestif possible, que Fourier a constaté pour la première fois et ainsi découvert les principaux traits de la belle théorie précédente.

On appelle *armille* ou anneau une mince barre courbe, de contexture isotrope, dont l'axe constitue une ligne fermée complète, qu'on suppose circulaire pour fixer les idées. Nous définirons analytiquement les divers points de cet axe par leur abscisse courbe x, qui sera leur distance, mesurée le long de la courbe même, à un premier point de celle-ci pris pour origine. Cette abscisse varierait de $-\infty$ à $+\infty$, si on la regardait comme celle d'un mobile décrivant la courbe d'un mouvement continu; mais il sera préférable ici de faire varier x seulement de $-l$ à l, si l est la demi-longueur de l'armille. Alors $-l$ et l seront les abscisses des deux bouts de la barre, censés venus au contact et soudés en un tout continu.

Par chaque point de l'axe il passe une section normale ω, fonction donnée de x, ainsi que son contour χ. Cette section normale, traversée perpendiculairement par le courant de chaleur qui circule le long de l'armille, constituera très sensiblement (p. 155), vu l'isotropie supposée de la matière, une surface isotherme; de sorte que la température u ne sera fonction, à très peu près, que de x et de t. La pente (montante) de la température le long de l'axe étant $\frac{du}{dx}$, le courant égalera, par unité d'aire de la section ω, $K\frac{du}{dx}$, et, à travers toute la section, $K\omega\frac{du}{dx}$.

Digitized by Google

Si l'on considère le tronçon, de volume ωdx et de capacité calorifique $C\omega dx$, compris entre les deux sections d'abscisses x et $x + dx$, le courant entré par la seconde section durant l'unité de temps excédera donc de $dx \frac{d}{dx}\left(K\omega \frac{du}{dx}\right)$ le courant sorti par la première. Cet excédent n'aura pas été emmagasiné tout entier dans le tronçon; car une partie, $k\chi dx u$ aura été rayonnée, par la surface latérale χdx du tronçon, vers l'atmosphère ambiante (supposée, bien entendu, à la température zéro), et une autre partie, $L\omega dx u$, l'aura été par tout son volume, s'il est diathermane [1]. C'est donc seulement la différence

$$\left[\frac{d}{dx}\left(K\omega \frac{du}{dx}\right) - (k\chi + L\omega) u\right] dx,$$

qui aura accru de $C\omega dx \frac{du}{dt}$, par unité de temps, la quantité de chaleur $C\omega dx u$ possédée par le tronçon. Et l'équation indéfinie du problème sera, après suppression du facteur commun dx,

$$(235) \qquad C\omega \frac{du}{dt} = \frac{d}{dx}\left(K\omega \frac{du}{dx}\right) - (k\chi + L\omega) u.$$

Divisons-la par $C\omega$; et, nous bornant, avec Fourier, au cas d'une armille homogène où ω, χ, C, K, k, L sont constants, posons

$$(236) \qquad \frac{K}{C} = a^2, \qquad \frac{k}{K}\frac{\chi}{\omega} + \frac{L}{K} = h,$$

où a et h seront positifs. Il viendra simplement

$$(237) \qquad \frac{du}{dt} = a^2\left(\frac{d^2 u}{dx^2} - hu\right).$$

Les deux abscisses limites $x = -l$ et $x = l$ peuvent être censées celles des deux sections extrêmes du corps, confondues en une

[1] Le rayonnement de l'armille sur elle-même rend évidemment la température extérieure u_e, censée ici nulle partout, un peu plus grande sur les éléments de la surface qui le reçoivent, ou les moins éloignés de l'axe de révolution, que sur les éléments de la surface plus extérieurs; et ce petit accroissement local de u_e doit varier d'un tronçon à l'autre. Mais nous supposons l'armille d'un rayon assez grand, par rapport aux dimensions des tronçons, pour que son rayonnement sur elle-même soit négligeable.

Digitized by Google

seule : alors celle-ci constitue une surface séparative, de part et d'autre de laquelle règne la même température u et circule le même courant de chaleur $K\omega \frac{du}{dx}$. En indiquant par les indices $-l$ ou l, placés au bas d'expressions quelconques, que ces expressions doivent être évaluées pour les valeurs $-l$ ou l de x, il nous faudra donc adjoindre à l'équation indéfinie (235) ou (237) les deux conditions de raccordement

$$(238) \qquad u_l - u_{-l} = 0, \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_l - \left(\frac{du}{dx}\right)_{-l} = 0.$$

Il y aura enfin les données d'état initial. Pour $t = 0$, la température u devra se réduire à une fonction connue $u_0 = f(x)$, arbitraire de $x = -l$ à $x = l$.

133. Étude préalable des températures stationnaires de l'armille. — Quittons pour un instant la question du refroidissement, afin de donner tout de suite, à raison de leur simplicité et de leur intérêt, les résultats obtenus par Fourier dans le problème des températures stationnaires de l'armille [1].

Fourier y suppose l'armille chauffée en certains de ses points, isolés les uns des autres, par des sources constantes de chaleur, ayant des températures connues. Alors l'équation aux dérivées partielles (237), dont le premier membre est nul par hypothèse, devient l'équation simplement différentielle

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} - hu = 0,$$

pour régir la distribution permanente des températures le long de chaque partie d'armille comprise entre deux sources consécutives, c'est-à-dire dans toute étendue où il y a seulement de la chaleur échangée avec les deux extrémités ou avec l'atmosphère environnante, et non de la chaleur créée ou détruite dans l'armille. Il en résulte par intégration, pour chacune de ces parties plus ou moins longues, une expression de la forme

$$(\alpha') \qquad u = A e^{x\sqrt{h}} + B e^{-x\sqrt{h}},$$

---

[1] *Théorie analytique de la chaleur*, nos **106** à **110**; et *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides* (au tome V des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, années 1821 et 1822), n° **101**.

Digitized by Google

où A, B se déterminent en exprimant que u devient les températures données de deux sources, aux extrémités de la partie d'armille en question, c'est-à-dire quand on met pour x les abscisses de ces deux sources.

Fourier observe que, si, u désignant la température en un point intermédiaire quelconque, d'abscisse x, on appelle u_1, u_{-1} les températures, en deux points de la même partie d'armille situés à une égale distance δ au delà et en deçà de ce point, ou ayant les abscisses respectives $x+\delta$ et $x-\delta$, la somme u_1+u_{-1} sera, d'après (α'),

$$(\mathrm{A}e^{x\sqrt{h}}+\mathrm{B}e^{-x\sqrt{h}})(e^{\delta\sqrt{h}}+e^{-\delta\sqrt{h}}),$$

c'est-à-dire $2u\cosh(\delta\sqrt{h})$; en sorte que la moyenne, $\frac{1}{2}(u_1+u_{-1})$, des températures des deux points extrêmes aura, avec la température u du point *moyen*, un rapport q donné par la relation simple

$$(\beta)\qquad \frac{u_1+u_{-1}}{2u} \quad \text{ou} \quad q=\tfrac{1}{2}(e^{\delta\sqrt{h}}+e^{-\delta\sqrt{h}})=\cosh(\delta\sqrt{h}).$$

Ce rapport est fonction seulement, pour une même armille, de la distance δ du point moyen aux deux autres et, par conséquent, indépendant des températures des sources, ainsi que de la situation, entre elles, du point moyen. Et si, l'espacement mutuel des points devenant double, on appelle q' la nouvelle valeur du rapport, savoir, $\frac{1}{2}(e^{2\delta\sqrt{h}}+e^{-2\delta\sqrt{h}})$, on aura identiquement

$$2q^2=\tfrac{1}{2}(e^{2\delta\sqrt{h}}+e^{-2\delta\sqrt{h}})+1,$$

c'est-à-dire

$$(\beta')\qquad q'=2q^2-1 \quad \text{ou} \quad q=\sqrt{\frac{q'+1}{2}}.$$

Fourier a vérifié, sur un anneau en fer, soigneusement poli et à section rectangulaire, la constance du rapport q, pour deux systèmes de trois points se suivant à une distance donnée δ dans une même partie d'armille, ou pour l'équivalent de deux tels systèmes de points. Et, en prenant cette distance δ double, il a vérifié aussi la formule (β'); ce qui montre que le rapport q égale bien le cosinus hyperbolique d'un argument proportionnel à la distance δ.

Le cas le plus simple est celui d'une seule source, dont on ap-

Digitized by Google

pellera u_m la température (l'indice m indiquant que ce sera la température maximum à considérer). Si alors u_0 désigne la température du point le plus éloigné de la source, à l'autre extrémité du diamètre émané d'elle, la symétrie de u de part et d'autre de ce diamètre donnera u_1, ou simplement u, pour valeur moyenne $\frac{1}{2}(u_1 + u_{-1})$ des températures aux deux points situés à une distance (courbe) δ quelconque de cette extrémité, tandis que u_0 sera la température au point moyen. La relation (β) deviendra donc

$$(\gamma) \qquad \frac{u}{u_0} = \operatorname{coh}(\delta\sqrt{h}).$$

Cette formule déterminera les températures u correspondant aux diverses abscisses curvilignes δ, après qu'elle aura permis elle-même de calculer u_0, ou de relier u_0 à u_m, en donnant, pour $\delta = l$,

$$(\gamma') \qquad \frac{u_m}{u_0} = \operatorname{coh}(l\sqrt{h}).$$

De (γ) et (γ') il résulte, en effet,

$$(\gamma'') \qquad \frac{u}{u_m} = \frac{\operatorname{coh}(\delta\sqrt{h})}{\operatorname{coh}(l\sqrt{h})}.$$

Le cas d'une barre rectiligne indéfinie, chauffée en un de ses points par une source de température u_m, et réduite même, si l'on veut, à sa moitié située d'un côté donné de la source, se confond avec le précédent, en y faisant l infini. A une distance finie x de la source, $\delta = l - x$; et l'équation (γ'') devient

$$\frac{u}{u_m} = \frac{\operatorname{coh}(l\sqrt{h} - x\sqrt{h})}{\operatorname{coh}(l\sqrt{h})} = \frac{e^{(l-x)\sqrt{h}} + e^{-(l-x)\sqrt{h}}}{e^{l\sqrt{h}} + e^{-l\sqrt{h}}}.$$

Les deux exponentielles $e^{-l\sqrt{h}}$, $e^{-(l-x)\sqrt{h}}$, étant infiniment petites, disparaissent des deux termes de la fraction; et l'on a la formule de Lambert, rappelée au n° 2 (p. 3),

$$(\gamma''') \qquad \frac{u}{u_m} = e^{-x\sqrt{h}},$$

formule démontrée en 1804, comme j'ai dit à cet endroit, par

Digitized by Google

Biot, à partir de l'équation aux dérivées partielles (237), qu'il avait pu déjà établir pour une barre athermane.

On aurait obtenu plus simplement cette intégrale (γ''') en appliquant l'équation différentielle (α) du côté, par exemple, des abscisses x positives, à partir de la source, mais sans franchir celle-ci; car l'équation (α) manque du terme qui exprimerait la chaleur créée sur place et se trouve incomplète pour les points où est la source. Les abscisses x étant ainsi positives dans (α'), la condition $u = 0$ pour x infini obligerait de poser $A = 0$; et, en faisant tendre ensuite x vers zéro, on aurait bien $B = u_m$.

La vérification expérimentale des diverses formules ci-dessus fait connaître, pour le corps observé, la constante h et, par suite, le rapport $\frac{k}{K}$ des deux conductibilités extérieure et intérieure, vu l'expression de h, réduite à $\frac{k}{K}\frac{\chi}{\omega}$ d'après les formules (236), dans le cas ordinaire d'un solide athermane. Aussi les observations de Fourier, citées ci-dessus après la formule (β'), lui ont-elles donné, comme on va voir, ce rapport pour son armille en fer.

Le rapport $\frac{k}{K}$ varie notablement avec le degré de poli du corps, ainsi que nous a permis de le prévoir une réflexion du n° 92 (p. 172). Il suffisait, dans les expériences de Fourier, d'une oxydation ou d'une ternissure de la surface de l'armille à peine perceptibles, pour porter de 2,27 à 2,31 environ la constante $2q$ et pour élever, par suite, d'un *septième* de sa valeur, le rapport $\frac{k}{K}$, qui passait de 0,133 à 0,152 (le mètre étant l'unité de longueur). Le rapport inverse $\frac{K}{k}$ décroissait donc, par ce fait, de 7,52 à 6,58. Fourier s'est arrêté, pour le cas du fer bien poli, à la valeur 7,5 de ce dernier rapport $\frac{K}{k}$: c'est, du moins, celle qu'il indique au n° IX des *Conséquences générales* de son Mémoire *Sur le refroidissement séculaire du globe terrestre* (1).

Le problème des températures stationnaires de l'armille, chauffée de distance en distance par n sources isolées, ou composée

(1) *Bulletin des Sciences*, publié par la *Société philomathique*. Paris, avril 1820.

Digitized by Google

ainsi de n parties régies séparément par l'équation (α), serait un peu plus compliqué, si l'on se donnait non pas les températures des sources, mais leurs débits fournis à l'armille par unité de temps. Ces débits pourraient même, dans un cas encore plus général comprenant les deux précédents, dépendre de la température u aux points voisins, ou égaler, par exemple, une fonction linéaire de u, variable en sens inverse de cette température et s'annulant pour une certaine valeur de u (¹). Alors, à la jonction de deux parties, la température u aurait même valeur dans les deux, et la somme des deux flux $\pm K\omega \frac{du}{dx}$ *entrants,* ou pris, l'un (pour la partie en deçà de l'abscisse x du point de jonction), avec le signe supérieur $+$, l'autre (pour la partie au delà), avec le signe inférieur $-$, égalerait le débit de la source, exprimé linéairement en u. On aurait donc bien un système de $2n$ équations du premier degré entre les $2n$ constantes arbitraires A, B des intégrales (α') relatives aux n parties de l'armille. Le problème serait toujours déterminé; mais les températures des diverses parties ne pourraient plus se calculer isolément.

134. Intégration des équations du refroidissement de l'armille. — On pourait appliquer directement au système (237), (238) la méthode générale. Mais Fourier préfère simplifier auparavant l'équation indéfinie (237), en faisant disparaître son dernier terme. A cet effet, il introduit une inconnue auxiliaire v, définie par la relation

$$u = e^{-a^2ht}v. \tag{239}$$

Il en résulte pour la dérivée $\frac{du}{dt}$ deux termes dont l'un, obtenu en faisant varier l'exponentielle, est précisément $-a^2hu$; et l'équa-

(¹) Le cas dont il s'agit ici, où le débit S_1 de la source est de la forme $\lambda(u_m - u)$, u_m désignant la valeur connue de u pour laquelle S_1 s'annule, comprend le cas *limite* $u = u_m$ étudié par Fourier, en faisant λ infini ou, par suite, $u = u_m$; et il comprend le nouveau cas limite où S_1 serait connu, en faisant, au contraire, λ infiniment petit, mais u_m assez grand pour que le produit λu_m garde une valeur sensible.

Digitized by Google

tion (237 devient, en v,

$$\frac{dv}{dt} = a^2 \frac{d^2 v}{dx^2}. \tag{240}$$

Quant aux conditions (238) de raccordement, la substitution de l'expression (239) de u leur laisse la même forme,

$$v_l - v_{-l} = 0, \qquad \left(\frac{dv}{dx}\right)_l - \left(\frac{dv}{dx}\right)_{-l} = 0. \tag{241}$$

Et, v égalant u pour $t = 0$, rien n'est changé non plus à la relation d'état initial

$$(\text{pour } t = 0) \qquad v = f(x). \tag{242}$$

On remarquera que ces équations (240) à (242) sont ce que deviennent celles qui régissent u, (237), etc., quand on y pose $L = 0$, $k = 0$, et, par suite, $h = 0$, c'est-à-dire quand l'armille est athermane et a sa surface imperméable à la chaleur. La substitution de v à u ramène donc le problème au cas d'une armille contenant indéfiniment la même quantité de chaleur, qui peut seulement s'y niveler. En d'autres termes, il est à prévoir que l'état pénultième, rendu variable avec une lenteur infinie par l'infinie petitesse supposée de h, sera l'équilibre de température $v = \text{const.}$, ou que, dans la solution simple fondamentale $e^{-m_0 t} U_0$, on aura simplement $m_0 = 0$, $U_0 = 1$.

Cherchons les solutions simples, de la forme $e^{-mt} U$; et, sachant que m est positif, posons, pour simplifier,

$$m = a^2 \alpha^2, \tag{243}$$

où α, paramètre auxiliaire, désignera la racine carrée *positive* (pour fixer les idées) du quotient de m par a^2. La substitution de $e^{-a^2\alpha^2 t} U$ à v, dans (240), donne alors, comme équation indéfinie en U,

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \alpha^2 U = 0. \tag{244}$$

C'est donc à cette forme simple que se trouve réduite ici l'équation (216) (p. 243). Il en résulte, si A, B sont deux constantes,

$$U = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x. \tag{245}$$

Pour déterminer α et le rapport mutuel de A et B, nous avons

Digitized by Google

les deux relations adjointes (241). Or l'expression (245) de U les réduit, divisées respectivement par 2 et par — 2, à

$$(246)\qquad \begin{cases} 0.A + (\sin\alpha l)B = 0, \\ (\alpha\sin\alpha l)A + 0.\quad B = 0. \end{cases}$$

On sait que la compatibilité de ces deux équations revient à l'annulation de leur déterminant, quand A et B ne doivent pas s'évanouir ensemble. On aura donc, comme équation en α,

$$(247)\qquad \alpha\sin^2\alpha l = 0;$$

d'où

$$(248)\qquad \alpha = 0,\quad \frac{\pi}{l},\quad \frac{2\pi}{l},\quad \ldots,\quad \frac{i\pi}{l},\quad \ldots,$$

i désignant un entier positif quelconque. Ainsi, toutes les expressions (245) de U possibles ici admettent la période $2l$, ou restent les mêmes quand x y varie de $2l$. On l'aurait prévu en regardant x comme croissant de $-\infty$ à ∞, c'est-à-dire comme l'abscisse d'un observateur qui décrirait indéfiniment l'axe de l'armille d'un mouvement continu, et, après chaque parcours $2l$, se retrouverait au même point, ou constaterait, par suite, autour de lui la même température, si sa vitesse avait été assez grande pour qu'il ne se fût, pour ainsi dire, point écoulé de temps entre les deux passages. Nous aurions donc pu écrire immédiatement les valeurs (248) de α. Mais la méthode que nous avons suivie aura l'avantage de nous renseigner sur l'ordre de multiplicité des racines, qui, par une exception relativement assez rare, se trouvent être doubles, sauf la plus petite [1].

Remplaçons, en effet, dans (247), $\sin\alpha l$ par son développement en facteurs, bien connu,

$$\alpha l\left(1-\frac{\alpha^2 l^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2 l^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha^2 l^2}{i^2\pi^2}\right)\cdots;$$

[1] On verra vers la fin de la XIXe Leçon la raison de cette duplicité des racines $m = a^2\alpha^2$, autres que la plus petite zéro. Assurément, l'existence de telles racines m multiples serait tout à fait improbable dans un corps pris au hasard; mais, quand il s'agit d'un corps ayant une forme assez simple pour que l'étude nous en soit facile ou seulement abordable, sa simplicité même constitue une circonstance *singulière,* de nature justement à amener parfois cette autre singularité de la multiplicité des racines m.

Digitized by Google

et substituons ensuite à α^2 son expression en m tirée de (243). Il viendra l'équation en m cherchée :

$$(249)\quad \alpha\frac{l^2 m}{a^2}\left(1-\frac{l^2 m}{\pi^2 a^2}\right)^2\left(1-\frac{l^2 m}{4\pi^2 a^2}\right)^2\cdots\left(1-\frac{l^2 m}{i^2\pi^2 a^2}\right)^2\cdots=0.$$

On voit que, à part la racine $m_0=0$, dont le degré de multiplicité peut paraître douteux (à cause du facteur subsistant α, égal à $\frac{\sqrt{m}}{a}$), toutes les autres,

$$m_1=\frac{\pi^2 a^2}{l^2},\qquad m_2=\frac{4\pi^2 a^2}{l^2},\qquad \ldots,\qquad m_i=\frac{i^2\pi^2 a^2}{l^2},\qquad \ldots,$$

d'ailleurs réelles et positives comme il le fallait, sont, de plus, *doubles*. Aussi le rapport $\frac{B}{A}$ est-il laissé indéterminé par les équations (246), quand on y annule $\alpha\sin^2\alpha l$. C'est bien dire que chaque racine m fournit *deux* valeurs distinctes de U, savoir, deux combinaisons linéaires quelconques de $\cos\alpha x$ et de $\sin\alpha x$. Comme on veut que le produit moyen de deux solutions simples égale toujours zéro, il sera naturel de prendre justement $\cos\alpha x$ et $\sin\alpha x$ pour celles qui correspondent à chaque valeur de α; car, de cette manière simple, le produit $\cos\alpha x\sin\alpha x$, ou $\frac{1}{2}\sin 2\alpha x$, de période l, aura bien sa valeur moyenne nulle, dans l'intervalle allant de $x=-l$ à $x=l$.

Quant à la racine $m=0$ ou $\alpha=0$, elle doit être regardée comme simple : car une des deux valeurs de U correspondantes, savoir $\sin\alpha x$, s'annulant alors identiquement, devient illusoire, ou ne donne rien dans l'intégrale générale; et il ne reste, pour $m=0$, que la valeur $U=\cos\alpha x=1$.

Déterminons enfin les coefficients c d'amplitude des diverses solutions simples par la formule de Fourier (228) (p. 250), qui devient ici

$$(250)\quad c=\frac{\int_{-l}^{l}Uf(x)\,dx}{\int_{-l}^{l}U^2\,dx},\qquad \text{avec } U=\text{ soit }\cos\alpha x,\qquad \text{soit }\sin\alpha x.$$

On sait que les valeurs moyennes de $\cos^2\alpha x$ et de $\sin^2\alpha x$ sont $\frac{1}{2}$, à part le cas de α nul, où elles sont 1 et zéro; en sorte que le dé-

Digitized by Google

nominateur de l'expression (250) de c égalera simplement l, sauf pour le coefficient c_0 de la solution fondamentale, où (U étant 1) ce dénominateur aura la valeur $2l$.

Mais voyons comment s'appliquera la méthode du n° 128 (p. 251). Faisons α variable avec continuité, et, l'appelant alors α', désignons par U' une fonction de x et de α' qui vérifie l'équation, pareille à (244),

$$\frac{d^2 U'}{dx^2} + \alpha'^2 U' = 0, \tag{251}$$

mais qui, en outre, se réduise à U pour $\alpha' = \alpha$. Ce sera, naturellement, $U' =$ soit $\cos\alpha' x$, soit $\sin\alpha' x$. Multiplions donc (251) par $U\,dx$, et retranchons-en (244) multiplié par $U'\,dx$; puis, observant que

$$U\frac{d^2 U'}{dx^2} - U'\frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(U\frac{dU'}{dx} - U'\frac{dU}{dx}\right),$$

intégrons de $x = -l$ à $x = l$. Il viendra, en faisant passer au second membre les termes intégrés et employant une notation bien usuelle,

$$(\alpha'^2 - \alpha^2)\int_{-l}^{l} U'U\,dx = \left(U'\frac{dU}{dx} - U\frac{dU'}{dx}\right)_{-l}^{l}.$$

Or, aux deux limites $x = \pm l$, U et $\frac{dU}{dx}$ ont, d'après (241), mêmes valeurs et peuvent, à volonté, être mis en facteur commun dans l'un ou l'autre des termes précédents, comme aussi être retranchés séparément de deux quantités dont on évaluerait la différence. Le second membre revient donc, successivement, à

$$\begin{aligned}\left(\frac{dU}{dx}\right)_l (U')_{-l}^{l} - U_l\left(\frac{dU'}{dx}\right)_{-l}^{l} &= \left(\frac{dU}{dx}\right)_l (U' - U)_{-l}^{l} - U_l\left(\frac{dU'}{dx} - \frac{dU}{dx}\right)_{-l}^{l} \\ &= \left[\frac{dU}{dx}(U' - U) - U\left(\frac{dU'}{dx} - \frac{dU}{dx}\right)\right]_{-l}^{l}.\end{aligned}$$

Alors, divisant par $\alpha' - \alpha$ et faisant tendre α' vers α, observons que, pour toute valeur de x, $U' - U$ et $\frac{dU'}{dx} - \frac{dU}{dx}$, divisés par $\alpha' - \alpha$, tendront vers les dérivées en α de U et de $\frac{dU}{dx}$. Il viendra donc

$$2\alpha\int_{-l}^{l} U^2\,dx = \left(\frac{dU}{dx}\frac{dU}{d\alpha} - U\frac{d^2 U}{dx\,d\alpha}\right)_{-l}^{l}. \tag{252}$$

Digitized by Google

Or, U étant ici une fonction de αx qui se reproduit, au signe près, par deux différentiations, si nous appelons V sa dérivée première en αx, $-$U sera la dérivée seconde; et nous aurons

$$\frac{dU}{dx} = V\alpha, \qquad \frac{dU}{d\alpha} = Vx, \qquad \frac{d^2U}{dx\,d\alpha} = -U\alpha x + V.$$

La formule (252) deviendra, vu, finalement, que $U^2 + V^2$ sera la somme des deux carrés $\cos^2\alpha x$ et $\sin^2\alpha x$, ou *vice versa*, et que le produit UV contiendra toujours le facteur nul $\sin\alpha l$,

$$(253) \qquad 2\alpha\int_{-l}^{l} U^2\,dx = [\alpha(U^2+V^2)x - UV]_{-l}^{l} = \alpha(x)_{-l}^{l} = 2\alpha l.$$

Si donc α n'est pas nul, le dénominateur de l'expression (250) de c sera bien l. Et la solution du problème se trouvera enfin contenue dans la formule

$$(254) \qquad v = c_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} e^{-\frac{i^2\pi^2 a^2 t}{l^2}}\left(c_i\cos\frac{i\pi x}{l} + c'_i\sin\frac{i\pi x}{l}\right),$$

où c_0, c_i, c'_i auront pour expressions

$$(255) \qquad \left\{\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,\\ c_i &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{i\pi x}{l}\,dx,\\ c'_i &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{i\pi x}{l}\,dx.\end{aligned}\right.$$

Pour l'époque $t = 0$, où v n'est autre que $f(x)$, la formule (254) donne donc le développement, en série périodique et à période $2l$, de la fonction $f(x)$, arbitraire dans tout l'intervalle $2l$ s'étendant de $x = -l$ à $x = +l$. Et l'on reconnaît, en effet, dans cette série trigonométrique, celle même de Fourier, qui a été, du reste, découverte ainsi. Elle se démontre aisément par vérification ou sommation directe, comme on sait [1].

---

[1] *Voir*, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, second fascicule, p. 164*.

Digitized by Google

135. États pénultième et antépénultième de l'armille : vérification expérimentale. — Revenons maintenant à l'armille donnée, perméable à la chaleur et dont, la température initiale étant toujours $u_0 = f(x)$, la température actuelle u est donnée par la formule (239). Vu (254), nous aurons

$$(256) \quad u = c_0 e^{-a^2 ht} + e^{-a^2\left(h+\frac{\pi^2}{l^2}\right)t}\left(c_1 \cos\frac{\pi x}{l} + c'_1 \sin\frac{\pi x}{l}\right) + \ldots$$

L'état pénultième, représenté par le premier terme, est, comme on le voit, uniforme; de sorte que l'armille, avant de se refroidir totalement, se met en équilibre de température sur toute sa longueur $2l$. Et elle se comporte, dans cet état pénultième, comme s'il s'était réalisé dès le début du refroidissement, le coefficient c_0 qui y affecte l'exponentielle $e^{-a^2 ht}$ étant, d'après la première formule (255), la moyenne, sur toute cette longueur, des valeurs initiales u_0 données.

L'influence des inégalités de l'état initial ne se fait sentir que lorsqu'on garde les termes en c_1 et c'_1, qui sont, par rapport à x, de période $2l$. En tenant compte de ces termes, on ne commet plus qu'une erreur de l'ordre des deux termes suivants, c'est-à-dire comparable, en général, à l'exponentielle $e^{-a^2\left(h+\frac{4\pi^2}{l^2}\right)t}$, dont le quotient par celle, $e^{-a^2\left(h+\frac{\pi^2}{l^2}\right)t}$, des deux termes considérés est, en petitesse, de l'ordre du cube $\left(e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}\right)^3$.

On conçoit donc que, après une première et courte période de début, la série tout entière ne diffère plus sensiblement de ce que donnent, à eux seuls, les trois termes en c_0, c_1 et c'_1. On peut dire que le phénomène est alors arrivé à sa période *antépénultième*. L'influence des inégalités initiales ne s'y accuse plus que par une sorte d'onde fixe, positive sur une moitié de l'armille, négative sur l'autre moitié, et qui s'affaisse ou disparaît peu à peu. Si l'on pose, en effet,

$$c_1 = -\sqrt{c_1^2 + c_1'^2}\sin\frac{\pi x_0}{l}, \qquad c'_1 = \sqrt{c_1^2 + c_1'^2}\cos\frac{\pi x_0}{l},$$

l'expression (256), ainsi réduite, devient

$$(257) \qquad u = c_0 e^{-a^2 ht} + \sqrt{c_1^2 + c_1'^2}\, e^{-a^2\left(h+\frac{\pi^2}{l^2}\right)t} \sin\frac{\pi(x - x_0)}{l};$$

Digitized by Google

et le dernier terme, seul fonction de x, est positif sur la moitié de l'armille qui s'étend de $x = x_0$ à $x = x_0 + l$, négatif sur l'autre moitié. Les valeurs de ce terme sont égales et contraires en deux points opposés quelconques, car il change de signe quand x varie de l.

La moyenne des températures, que j'appellerai u, u', aux deux extrémités d'un même diamètre de l'armille, est donc indépendante de l'orientation de ce diamètre, et exprimée simplement, vu la première (255), en appelant $\mathfrak{M} u_0$ la moyenne des températures initiales données, par la formule

$$\frac{u + u'}{2} = (\mathfrak{M} u_0) e^{-a^2 ht}. \tag{258}$$

D'après les valeurs (236) de a^2 et de h, la conductibilité intérieure K n'y figure nullement.

Cette formule remarquable a été vérifiée par Fourier, dans des expériences sur l'armille polie en fer et à section rectangulaire, dont il a été parlé ci-dessus (p. 261 et 263), où l'on avait tâché de rendre aussi variée et aussi irrégulière que possible la distribution initiale des températures [1].

Le coefficient $-a^2 h$ du temps t, dans l'exponentielle, se déduit de ces expériences; et comme, si l'armille est athermane, les formules (236) donnent $a^2 h = \frac{k}{C} \frac{\chi}{\omega}$, que, d'ailleurs, l'aire ω de la section, son contour χ et la capacité calorifique C par unité de volume sont connues, il en résulte la détermination de la conductibilité extérieure k. L'observation des températures stationnaires de l'armille ayant déjà fait connaître (p. 263) le rapport $\frac{k}{K}$ des deux conductibilités k et K, on pourra donc obtenir aussi cette dernière, c'est-à-dire la conductibilité intérieure K, ou, plus di-

---

[1] Les expériences dont il s'agit sont détaillées au n° 102 du Mémoire de Fourier *Sur la théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*, IIe partie, que contient le tome V (années 1821 et 1822) des *Mémoires de l'Académie des Sciences*.

Digitized by Google

rectement, son quotient a^2 par la capacité calorifique C de l'unité de volume ([1]).

([1]) Fourier ne donne pas cette valeur de a^2 pour le fer forgé, au n° 102 cité ici. Mais, dans le Mémoire *Sur le refroidissement séculaire du globe terrestre* (*Société philomathique*, avril 1820) rappelé plus haut, il indique comme approchée, pour l'inverse $\frac{1}{a^2}$, au n° VII des *Conséquences générales*, la valeur 1083 (et non 1033, qui figure, par erreur d'impression, à la page 285 du tome II de l'édition récente des *Œuvres* de Fourier, publiée par M. G. Darboux) : ses unités de longueur et de temps sont le mètre et la minute sexagésimale. Le rapport $\frac{K}{C}$ vaudrait donc, dans le fer, $\frac{1}{1083}$ ou 0,00092 environ.

En tirant a^2 de toute équation où a^2 figure, comme, par exemple, de l'équation (240) (p. 265), où les différentielles de v sont de la nature de v, et où dx est une ligne, mais dt un temps, on remarquera que ce coefficient a^2 ou $\frac{K}{C}$ est le quotient du carré d'une ligne par un temps. Par suite, si l'unité de longueur et l'unité de temps deviennent, la première, m fois plus grande et, la seconde, n fois plus grande, la valeur numérique de a^2 sera divisée par m^2 et multipliée par n; car le nombre évaluant la ligne deviendra m fois moindre, et le nombre évaluant le temps, n fois moindre. C'est bien la règle qui a été suivie dans la note de la page 228.

De même, un flux de chaleur s'exprimant, tantôt, par une formule comme $K\frac{du}{dx}$ et, tantôt, par une formule comme ku, le rapport $\frac{k}{K}$ des deux conductibilités extérieure et intérieure est l'inverse d'une ligne; et sa valeur numérique se trouve multipliée par m quand l'unité de longueur devient m fois plus grande.

Digitized by Google

DIX-HUITIÈME LEÇON.

REFROIDISSEMENTS COMPARÉS DE LA SPHÈRE ET DU CUBE.

136. Expériences de Fourier sur le refroidissement de corps sphériques et cubiques. — Le compte rendu des expériences sur l'armille, dans le même Mémoire de Fourier, est suivi [1] de la relation de quelques autres, sur le refroidissement de diverses sphères en fer poli et d'un cube de la même matière, dont le côté 2R ($0^m,055$ environ) égalait sensiblement le diamètre de l'une des sphères. Elles ont confirmé l'exactitude de la loi de Newton, c'est-à-dire de la forme exponentielle Ae^{-mt} des températures successives d'une portion quelconque de ces corps, après une période, toujours assez courte, employée à régulariser ces températures, c'est-à-dire à débarrasser la solution générale des termes autres que le terme fondamental. Quoique le refroidissement y eût lieu au sein des courants d'air qu'il provoquait, et dont la vitesse, décroissante avec les excédents u, faisait légèrement décroître aussi le coefficient m de l'exposant, ce coefficient devenait très sensiblement invariable dès que les excédents u ne dépassaient plus 20° Réaumur environ (ou 25° centigrades).

Quant aux deux expériences relatives au cube (de $0^m,055$ de côté) et à la sphère de diamètre pareil, leur comparaison a montré que, une fois la période de régularisation écoulée, les durées de refroidissement de ces corps, ou les temps employés à réduire dans un même rapport les températures respectives de leurs divers points, étaient, dans le cube et dans la sphère, comme 39 minutes 4 secondes est à 33 minutes 40 secondes, ou comme 2344 secondes est à 2020 secondes. Le quotient du

[1] *Sur la théorie du mouvement de la chaleur*, etc., nos **103** et **104**.

Digitized by Google

second de ces nombres par le premier étant 0,862, les temps de refroidissement de la sphère égalaient donc environ les 862 millièmes de ceux du cube. Voyons si la théorie est confirmée par ce résultat, dont nous pourrons d'ailleurs nous rendre compte avec peu de calculs et en utilisant les formules mêmes du refroidissement de l'armille. Nous aurons ainsi de ces formules une application très intéressante.

137. Refroidissements comparés d'une sphère et du cube circonscriptible à la sphère : cas d'une conductibilité extérieure très petite. — La conductibilité extérieure, supposée commune, de la sphère et du cube se trouvait nécessairement comprise entre une valeur de k assez *petite* pour rendre très lente la sortie de la chaleur, ou permettre, par suite, à la conductibilité intérieure K d'uniformiser sans cesse les températures dans tout le corps considéré, et une valeur de k assez *grande*, au contraire, pour porter presque instantanément à la température zéro du dehors le dessous de la couche superficielle, et réduire ainsi le refroidissement par rayonnement à un refroidissement par contact. Il y a donc lieu de penser que le rapport effectif des temps de refroidissement de la sphère à ceux du cube se trouvera compris entre les deux valeurs correspondant à ces hypothèses extrêmes et simples.

Or, dans la première, où la conductibilité intérieure maintient uniformes, après une période préparatoire, les températures des corps, le rapport cherché est 1. En effet, ϖ étant le volume d'un des corps, σ sa surface et u sa température intérieure, son refroidissement $-\frac{du}{dt}$ par unité de temps correspond à une chaleur perdue, $-C\varpi\frac{du}{dt}$, rayonnée au dehors sur toute l'étendue σ à raison de l'excédent u, ou égale à $k\sigma u$. On a donc

$$(\alpha) \qquad \frac{du}{dt} = -\frac{k\sigma}{C\varpi}u; \qquad \text{d'où} \qquad u = Ae^{-\frac{k\sigma t}{C\varpi}},$$

si A désigne le coefficient du terme fondamental de la solution, alors réduite à ce terme. Les deux corps considérés (cube et sphère) étant réguliers, de même apothème R, le quotient $\frac{\sigma}{\varpi}$ y

Digitized by Google

égale $\frac{3}{R}$, et il vient, dans les deux cas,

$$(\alpha') \qquad u = A e^{-\frac{3kt}{CR}}.$$

Le cube et la sphère qui lui est inscriptible ont donc bien la même formule de refroidissement.

138. **Suite; cas opposé d'une conductibilité extérieure très grande; refroidissement de la sphère.** — Passons maintenant à l'autre hypothèse extrême, celle d'une conductibilité extérieure de la sphère et du cube, suffisante pour abaisser à zéro leur surface avant que l'état initial des températures dans l'intérieur soit sensiblement altéré. Comme nous ne cherchons, pour chaque corps, que la forme de la solution simple fondamentale, expression d'un état pénultième toujours semblable à lui-même quel que soit l'état initial, nous pourrons, pour fixer les idées, nous donner celui-ci uniforme; de sorte que l'on ait, par exemple, $u = 1$ à l'époque $t = 0$, sauf tout près de la surface, où u décroîtra rapidement de cette valeur 1 à zéro.

Alors, nous occupant d'abord de la sphère, observons que les températures y seront, à toute époque t, par raison de symétrie, fonction seulement, comme au début, de la distance au centre, distance que nous appellerons x. Si nous y considérons une couche sphérique élémentaire $4\pi x^2 dx$, de rayon intérieur x et d'épaisseur dx, la chaleur qu'elle cédera par sa surface concave $4\pi x^2$ à la matière plus intérieure sera, par unité de temps, $4\pi x^2\left(K\frac{du}{dx}\right)$, tandis que celle qui lui viendra, à travers sa surface convexe, de la matière extérieure, sera la même quantité, accrue de sa différentielle en x, $4\pi K\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{du}{dx}\right)dx$. C'est cet excédent qui élève sa température de $\frac{du}{dt}$, ou qui constitue son gain de chaleur par unité de temps, savoir, $4\pi x^2 dx\left(C\frac{du}{dt}\right)$. Divisons ces deux expressions égales par $4\pi C x\,dx$ et, en appelant, comme plus haut (p. 259), a^2 le quotient $\frac{K}{C}$, puis effectuant les dérivations en x indiquées, nous aurons, sous les formes successives suivantes, l'équation aux dé-

Digitized by Google

rivées partielles qui régit u,

$$x\frac{du}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{d.xu}{dt} = \frac{a^2}{x}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{du}{dx}\right) = a^2\left(x\frac{d^2u}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\right) = a^2\frac{d^2.xu}{dx^2}.$$

Adoptons pour fonction inconnue, au lieu de la température u, son produit par la distance x au centre, en posant

$$(\beta) \qquad xu = v;$$

et l'équation en v sera précisément (240) (p. 265), comme dans l'armille. D'ailleurs la fonction v est à considérer depuis le centre $x = 0$ de la sphère, où v s'annule par son premier facteur x, jusqu'à la surface $x = R$, où il s'annule par son second facteur u, après avoir eu dans l'intervalle, du moins aux époques voisines du temps $t = 0$, les valeurs x, sauf tout près de la limite $x = R$, région de son rapide décroissement initial. La fonction v sera donc ce qu'elle serait dans la moitié à abscisses x positives d'une armille de longueur $2R$, si, l'état initial de cette moitié étant $v = x$ jusqu'à l'approche de l'extrémité $x = R$ (où v décroîtrait pour s'annuler), ses deux bouts $x = 0$, $x = R$ étaient maintenus constamment à la température zéro.

Or ils le seront par le jeu même de la propagation de la chaleur dans l'armille, si l'on a soin de choisir la température initiale, jusqu'à présent disponible, de la seconde moitié d'armille, à abscisses x négatives, partout égale et contraire à ce qu'elle est, dans la première moitié, aux points symétriques par rapport au diamètre séparatif des deux moitiés. En effet, multiplions par -1 l'expression de v obtenue alors pour toute l'armille : nous aurons, vu la forme linéaire, sans terme indépendant de v, de l'équation (240) et des conditions (241), ce que deviendrait v pour un état primitif symétrique du premier, et où ce serait la seconde moitié de l'armille, non la première, qui aurait les valeurs initiales de v données ici. Il est clair, en raison même de cette symétrie des états initiaux et de celle de l'armille par rapport au diamètre considéré, que, dans ce second cas, la première moitié offrira, à toute époque t, les valeurs de v qu'avait la seconde dans le premier cas. Or ces nouvelles valeurs de v dans la première moitié sont précisément les contraires de celles du premier cas, puisqu'elles ont été simplement multipliées par -1. Donc, dans le premier

Digitized by Google

cas, qui est le proposé, les valeurs de v sur la seconde moitié égalent, à toute époque, les valeurs mêmes de v aux points correspondants de la première moitié, *changées de signe*. Et alors la continuité de v à la jonction $x=0$, $x=\pm R$ des deux moitiés, y exige bien son annulation constante.

L'expression de v résultera donc des formules (254) et (255) (p. 269), où l'on fera $l=R$ et $f(x)=x$. Il vient, à cause de l'imparité de x et en intégrant finalement par parties,

$$c_0=0, \qquad c_i=0,$$

$$c'_i=\frac{2}{R}\int_0^R x\sin\frac{i\pi x}{R}\,dx=-\frac{2}{i\pi}\int_{x=0}^{x=R} x\,d\cos\frac{i\pi x}{R}$$
$$=-\frac{2}{i\pi}\left(x\cos\frac{i\pi x}{R}-\frac{R}{i\pi}\sin\frac{i\pi x}{R}\right)_0^R=-\frac{2R\cos i\pi}{i\pi}.$$

La valeur cherchée $\frac{v}{x}$ de u sera dès lors

$$(\beta')\qquad u=2e^{-\frac{\pi^2a^2t}{R^2}}\frac{\sin\frac{\pi x}{R}}{\frac{\pi x}{R}}-2e^{-\frac{4\pi^2a^2t}{R^2}}\frac{\sin\frac{2\pi x}{R}}{\frac{2\pi x}{R}}+\ldots;$$

et le premier terme du second membre (essentiellement positif entre les limites $x=0$, $x=R$) exprimera l'état pénultième dont nous voulions obtenir la forme.

139. Refroidissement du cube dans le même cas d'une conductibilité extérieure très grande. — Passons maintenant au cube, que nous rapporterons à des axes des x, y, z joignant les milieux des faces opposées et qui se trouvera compris entre les six plans $x=\pm R$, $y=\pm R$, $z=\pm R$, sans cesse refroidis à zéro. On y aura initialement $u=1$, sauf à l'approche des faces, où u décroîtra rapidement jusqu'à zéro.

Ne considérant d'abord que la coordonnée x et les deux faces correspondantes $x=\pm R$, comme si notre corps n'avait qu'une dimension, et appelant v la température dans cette hypothèse, donnons-nous, pour régir v, l'équation indéfinie (240) (p. 265), avec l'état initial $v=1$, sauf tout près des limites $x=\pm R$, où v décroîtra rapidement et symétriquement jusqu'à zéro. Alors représentons-nous une armille de longueur $4R$; et appliquons notre fonction v

Digitized by Google

à sa moitié allant de $x = -R$ à $x = +R$, moitié aux deux extrémités de laquelle nous assurerons, à toute époque, la température voulue $v = 0$, en choisissant comme ci-dessus, sur l'autre moitié d'armille, des valeurs initiales de v, égales et contraires à celles de v aux points de la première moitié symétriques par rapport au diamètre séparatif des deux moitiés. Il suffira donc, pour avoir la fonction v cherchée, de faire, dans (254) et (255), $l = 2R$ et, d'une part, $f(x) = 1$ de $x = -R$ à $x = +R$ sensiblement, d'autre part $f(x) = -1$, de même, dans l'autre moitié du champ des $\int$ prises entre les limites $\pm 2R$. Les intégrales à fonction impaire sous le signe $\int$, c'est-à-dire celles où figurent des sinus, seront nulles, et même les intégrales, à fonction paire, où figureront les cosinus qui reprennent les mêmes valeurs, de $x = R$ à $x = 2R$, que de $x = R$ à $x = 0$, c'est-à-dire les cosinus où i est pair. Quant aux autres intégrales à cosinus, où i sera de la forme $2j + 1$ avec $j = 0, = 1, = 2, \ldots$, les cosinus y recevront, de $x = R$ à $x = 2R$, des valeurs égales et contraires à celles qu'ils auront eues de $x = R$ à $x = 0$; et comme $f(x)$ s'y change, de $+1$, en -1, on ne les prendra que de $x = 0$ à $x = R$ en doublant les résultats, outre un premier doublement pour tenir compte aussi de la moitié du champ d'intégration où x est négatif. Il viendra donc

$$c'_i = 0, \qquad c_{2j} = 0,$$

$$c_{2j+1} = \frac{4}{2R}\int_0^R \cos\frac{(2j+1)\pi x}{2R}\,dx = \frac{4}{(2j+1)\pi}\left[\sin\frac{(2j+1)\pi x}{2R}\right]_0^R$$
$$= \frac{4}{(2j+1)\pi}\sin\frac{(2j+1)\pi}{2} = \pm\frac{4}{(2j+1)\pi}.$$

En appelant $\varphi(t, x)$ la fonction v ainsi obtenue, la formule (254) donnera donc

$$(\gamma) \qquad \varphi(t, x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1}e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{4R^2}}\cos\frac{\pi x}{2R} - \frac{1}{3}e^{-\frac{9\pi^2 a^2 t}{4R^2}}\cos\frac{3\pi x}{2R} + \ldots\right).$$

Et nous aurons à nous rappeler que cette fonction satisfait, pour les valeurs positives de t, aux conditions suivantes : 1° elle a la valeur 1 entre les limites $x = \pm R$, quand t s'évanouit; 2° elle

Digitized by Google

s'annule à ces limites, quel que soit t; 3° elle donne

$$\frac{d\varphi}{dt} - a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0,$$

quels que soient t et x.

Cela étant, si l'on y remplace x par y et puis par z, le produit

$$(\gamma') \qquad u = \varphi(t, x)\varphi(t, y)\varphi(t, z)$$

sera l'expression cherchée des températures dans le cube. Car : 1°, pour $t = 0$, il se réduit à 1 dans tout l'intérieur, c'est-à-dire entre les faces $x = \pm R$, $y = \pm R$, $z = \pm R$; 2°, il s'annule, à toute époque t positive, sur chacune de ces faces, où l'un des facteurs devient zéro; 3° enfin, ces trois facteurs donnent identiquement

$$\frac{d\varphi(t, x)}{dt} - a^2 \frac{d^2\varphi(t, x)}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi(t, y)}{dt} - a^2 \frac{d^2\varphi(t, y)}{dy^2} = 0,$$

$$\frac{d\varphi(t, z)}{dt} - a^2 \frac{d^2\varphi(t, z)}{dz^2} = 0.$$

Or, si l'on ajoute ces trois identités, respectivement multipliées par $\varphi(t, y)\varphi(t, z)$, $\varphi(t, z)\varphi(t, x)$, $\varphi(t, x)\varphi(t, y)$, il viendra

$$\frac{d.\varphi(t, x)\varphi(t, y)\varphi(t, z)}{dt} - a^2 \Delta_2 . \varphi(t, x)\varphi(t, y)\varphi(t, z) = 0;$$

ce qui exprime que le produit des trois fonctions φ vérifie bien l'équation indéfinie du problème, $\frac{du}{dt} - a^2 \Delta_2 u = 0$.

Réduisons les séries $\varphi(t, x)$, $\varphi(t, y)$, $\varphi(t, z)$ à leur premier terme, de signe constant, où l'exponentielle a la plus petite valeur absolue; et nous aurons, comme expression de l'état pénultième du cube, à comparer au premier terme de la série (β'),

$$(\gamma'') \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 e^{-\frac{3\pi^2 a^2 t}{4R^2}} \cos\frac{\pi x}{2R} \cos\frac{\pi y}{2R} \cos\frac{\pi z}{2R} \\ &= (2{,}064)\, e^{-\frac{3\pi^2 a^2 t}{4R^2}} \cos\frac{\pi x}{2R} \cos\frac{\pi y}{2R} \cos\frac{\pi z}{2R}. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

140. Comparaison des refroidissements de la sphère et du cube; confrontation expérimentale. — Considérons maintenant ces températures du cube aux époques postérieures à un instant donné $t = t_0$; et demandons-nous après quelle durée T, comptée à partir de cet instant, elles se trouveront réduites à une fraction assignée quelconque, $e^{-\mu}$, de leurs valeurs existant à ce même instant $t = t_0$. Dans l'exponentielle de (γ''), l'accroissement T donné au temps t aura donc accru de μ la valeur absolue de l'exposant; et l'on aura

$$(\gamma''') \qquad \frac{3\pi^2 a^2 T}{4R^2} = \mu, \qquad T = \mu \frac{4R^2}{3\pi^2 a^2}.$$

Or pareille réduction relative $e^{-\mu}$ se serait produite dans la sphère, vu l'exponentielle du premier terme de la série (β'), après un temps T′ donnant

$$(\gamma^{\text{iv}}) \qquad \frac{\pi^2 a^2 T'}{R^2} = \mu; \qquad \text{d'où} \qquad T' = \mu \frac{R^2}{\pi^2 a^2}.$$

Ce temps T′ est les $\frac{3}{4}$ de T.

Donc, tandis que, pour une conductibilité extérieure k beaucoup moins active à refroidir la superficie des corps, que ne l'est la conductibilité intérieure K à uniformiser les températures du dedans, le rapport des durées de refroidissement de la sphère et du cube était 1, ce rapport s'abaisse jusqu'à la limite $\frac{3}{4}$ lorsque, au contraire, c'est la conductibilité extérieure qui produit son effet beaucoup plus vite que la conductibilité intérieure le sien.

Fourier, au n° 340 de son Traité sur la *Théorie analytique de la chaleur,* était arrivé aux mêmes résultats, mais en laissant constantes les deux conductibilités et en faisant, de préférence, grandir, du premier cas au second, la dimension 2R des corps, afin d'accroître, et de prolonger ainsi, la tâche de la conductibilité intérieure K.

On voit que la double expérience sur la sphère et le cube, en fer poli, de $0^m,055$ de diamètre, en donnant 0,862 pour le rapport dont il s'agit, s'est placée assez près de la moyenne, 0,875, des deux limites 1 et $\frac{3}{4}$: ce qui invite à en tenter un calcul théorique plus complet.

Digitized by Google

Ce calcul sera assez facile, pourvu qu'on puisse connaître la valeur qu'avait le rapport $\frac{k}{K}$, *supposé* avoir été commun aux deux corps.

141. Refroidissements de la sphère et du cube, dans le cas d'une conductibilité extérieure quelconque. — Si nous considérons d'abord la sphère, le flux $-K\frac{du}{dx}$ qu'elle fournit, pour $x = R$, à l'unité d'aire de sa surface, égalera le flux ku rayonné au dehors; et l'on aura

$$(\text{pour } x = R) \quad \frac{du}{dx} = -\frac{k}{K}u, \quad \text{ou} \quad \frac{d.xu}{dx} = x\frac{du}{dx} + u = -\frac{k}{K}xu + \frac{xu}{R},$$

c'est-à-dire

$$(\delta) \qquad (\text{pour } x = R) \qquad \frac{dv}{dx} = -hv, \qquad \text{avec} \qquad h = \frac{k}{K} - \frac{1}{R},$$

relation binome remplaçant la relation monome $v = 0$ du cas précédent, où le rapport h était comme infini.

Les autres équations du problème n'ayant pas changé, l'analogie avec les valeurs de v dans la moitié à abscisses x positives d'une armille de longueur $2R$, dont l'autre moitié offrirait valeurs égales et contraires de v, subsistera toujours, mais à la condition que l'armille ait, sur toute l'étendue de ses sections extrêmes $x = \pm R$, une *coupure* (ou cassure infiniment étroite) mettant ces sections en rapport de rayonnement avec une source calorifique indéfinie à la température zéro. En effet, si Kh désigne alors le coefficient de la conductibilité extérieure de ces sections, (δ) sera bien la condition correspondante.

Les solutions simples auront donc encore la forme $e^{-a^2\alpha^2 t}U$, avec U donné par (245) et réduit à sa partie impaire $B\sin\alpha x$; mais, α se déterminant, d'après (δ), par l'équation

$$\alpha\cos\alpha R = -h\sin\alpha R, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tang}(\alpha R) = -\frac{(\alpha R)}{hR},$$

la valeur de α qui correspondra au terme fondamental de v sera la plus petite racine positive de cette équation. Appelons β' le produit αR ainsi obtenu; et, vu les valeurs, (δ), de h et, $\frac{v}{x}$, de u,

Digitized by Google

nous aurons, pour exprimer l'état pénultième de la sphère, la formule suivante, où B désigne un nouveau coefficient d'amplitude,

$$(\delta') \qquad u = \mathrm{B}\, e^{-\frac{a^2\beta'^2 t}{\mathrm{R}^2}} \frac{\sin\frac{\beta' x}{\mathrm{R}}}{\frac{\beta' x}{\mathrm{R}}}, \qquad \text{avec} \qquad \frac{\beta'}{\operatorname{tang}\beta'} = 1 - \frac{k\mathrm{R}}{\mathrm{K}}.$$

Le second membre $1 - \frac{k\mathrm{R}}{\mathrm{K}}$ de cette dernière équation est compris entre 1 et $-\infty$, tandis que le premier membre décroît de 1 à zéro, puis de zéro à $-\infty$, quand β' croît, d'abord, de 0 à $\frac{\pi}{2}$, puis de $\frac{\pi}{2}$ à π. La première racine positive β' n'excède donc jamais π; ce qui rend essentiellement positive l'expression $\frac{\mathrm{R}}{\beta'}\sin\frac{\beta' x}{\mathrm{R}}$ de U, d'ailleurs unique pour toute valeur de β'. Ainsi la solution simple (δ'), *de même signe dans toute l'étendue de la sphère et la seule qui corresponde à son exponentielle,* constitue bien (p. 255) la solution fondamentale.

Dans le cas du cube, il y aura encore à former une fonction paire $v = \varphi(t, x)$ ayant la valeur initiale 1 entre les limites $x = \pm \mathrm{R}$ et satisfaisant à l'équation indéfinie $\frac{dv}{dt} = a^2 \frac{d^2 v}{dx^2}$; mais, au lieu de s'annuler pour $x = \mathrm{R}$, elle devra (vu la condition de rayonnement $\mathrm{K}\frac{du}{dx} = -ku$ à y vérifier maintenant) donner

$$(\varepsilon) \qquad (\text{pour } x = \mathrm{R}) \qquad \frac{dv}{dx} = -hv, \qquad \text{avec} \qquad h = \frac{k}{\mathrm{K}}.$$

Et l'analogie avec une moitié d'armille s'étendant de $x = -\mathrm{R}$ à $x = \mathrm{R}$ continuera à se produire, si cette moitié d'armille est séparée de l'autre moitié et que ses deux sections extrêmes $x = \pm \mathrm{R}$, devenues ainsi libres, rayonnent vers deux sources à la température zéro. Les solutions simples sont donc encore de la forme $e^{-a^2\alpha^2 t}\mathrm{U}$, avec U exprimé par (245) et réduit à sa partie paire $\mathrm{A}\cos\alpha x$. Mais l'équation (ε) donne, au lieu de $\cos(\alpha\mathrm{R}) = 0$,

$$-\alpha\sin(\alpha\mathrm{R}) = -h\cos(\alpha\mathrm{R}), \qquad \text{ou} \qquad (\alpha\mathrm{R})\operatorname{tang}(\alpha\mathrm{R}) = h\mathrm{R} = \frac{k\mathrm{R}}{\mathrm{K}}.$$

Si donc on pose $\alpha\mathrm{R} = \beta$ et qu'on choisisse la plus petite valeur

Digitized by Google

positive de β fournie par cette équation, il viendra comme terme fondamental de $\varphi(t, x)$ une expression de la forme

$$(\varepsilon_1) \qquad A e^{-\frac{a^2\beta^2 t}{R^2}} \cos\frac{\beta x}{R}.$$

Les mêmes raisonnements que dans le cas du cube se refroidissant par contact montreront d'ailleurs que la fonction u est encore le produit $\varphi(t, x)\varphi(t, y)\varphi(t, z)$; de sorte que l'état pénultième du cube sera donné par la formule

$$(\varepsilon') \qquad u = A^3 e^{-\frac{3a^2\beta^2 t}{R^2}} \cos\frac{\beta x}{R}\cos\frac{\beta y}{R}\cos\frac{\beta z}{R}, \qquad \text{avec} \qquad \beta \operatorname{tang}\beta = \frac{kR}{K}.$$

Le produit $\beta \operatorname{tang}\beta$ prend toutes les valeurs positives, y compris, par conséquent, celle du second membre $\frac{kR}{K}$, quand β croît de zéro à $\frac{\pi}{2}$. La première racine positive β est donc inférieure à $\frac{\pi}{2}$; et l'expression (ε') de u, *de même signe dans toute l'étendue du cube,* constitue bien la solution simple fondamentale.

Nous n'aurons pas à faire usage, dans (δ') et (ε_1) ou (ε'), des coefficients d'amplitude B et A. Mais on les déduirait sans difficulté de la formule générale (228) (p. 250), avec adjonction, si l'on veut, de (231) (p. 252), formules que l'on appliquerait à la partie d'armille servant de type soit à la sphère, soit au cube, et qui s'étend *essentiellement* de $x = 0$ à $x = R$ (même dans le cas du cube, où l'on peut supposer alors le plan de symétrie $x = 0$ imperméable à la chaleur). Il faudrait donc prendre, dans ces formules (228) et (231) :

$$\left\{\begin{array}{l} d\varpi = dx \text{ (avec } x \text{ variable de zéro à R);} \\ u_0 = \text{soit } x \text{ (dans la sphère), soit 1 (dans le cube);} \\ U = \text{soit } \sin\alpha x, \text{ soit } \cos\alpha x, \text{ avec } \alpha = \frac{\sqrt{m}}{a}; \\ \text{enfin,} \\ C = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_n = \pm a^2 \frac{dU}{dx}. \end{array}\right.$$

Dans (231), l'intégrale $\int_\sigma$ aurait ses éléments relatifs à la limite $x = 0$ nuls identiquement, vu l'annulation à cette limite

Digitized by Google

(quels que soient m ou α) de U pour la sphère et de $\mathcal{J}_n$ et k pour le cube. Le second membre de (231) se réduirait donc à l'expression

$$-\mathrm{U}\left(a^2\frac{d^2\mathrm{U}}{dx\,dm}+k\frac{d\mathrm{U}}{dm}\right)=-a^2\mathrm{U}\left(\frac{d^2\mathrm{U}}{dx\,dm}+h\frac{d\mathrm{U}}{dm}\right),$$

prise pour $x=\mathrm{R}$ et pour la valeur de α, c'est-à-dire de $\frac{\beta'}{\mathrm{R}}$ ou de $\frac{\beta}{\mathrm{R}}$, que fera connaître la résolution de l'équation transcendante (δ') ou (ε') en β' et β [1].

---

[1] **Comment se calculera le refroidissement d'un parallélépipède rectangle.** — La théorie précédente s'étend d'elle-même à un parallélépipède rectangle de dimensions respectives 2a, 2b, 2c suivant les x, y, z, avec coefficients h, h_1, h_2 différents pour les trois systèmes de faces parallèles. Alors les deux facteurs $\varphi(t, y)$, $\varphi(t, z)$ font place à deux autres $\varphi_1(t, y)$, $\varphi_2(t, z)$, déduits de $\varphi(t, x)$ en remplaçant non seulement x par y ou par z, mais aussi R (ou a) et h par b et par h_1, ou par c et par h_2, et, par suite, les racines α par d'autres, s'obtenant de même, que j'appellerai respectivement β et γ. Et il est clair que si la température initiale, au lieu d'être 1, était, plus généralement, le produit, $f(x)f_1(y)f_2(z)$, de trois fonctions paires quelconques en x, y, z respectivement, il n'y aurait encore de changés, dans les expressions des facteurs $\varphi(t, x)$, $\varphi_1(t, y)$, $\varphi_2(t, z)$ donnant u par leur produit, que les coefficients numériques A, ou A_1, ou A_2; car on déterminerait ceux-ci de manière à avoir, par exemple, en faisant $t=0$ dans $\sum \mathrm{A}e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha x$ ou $\varphi(t, x)$,

$$\sum \mathrm{A}\cos\alpha x = f(x) \qquad (\text{de } x=0 \text{ à } x=\mathrm{a}).$$

Comment raisonnera-t-on, maintenant, si l'état initial u_0, que j'appellerai

$$f(x, y, z),$$

encore pair en x, y, z, n'est plus le produit de trois fonctions de x, y, z? Les termes des fonctions précédentes, multipliés trois à trois de toutes les manières possibles, donneront toujours des solutions simples de la forme

$$ce^{-a^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}\cos\alpha x\cos\beta y\cos\gamma z,$$

qui vérifieront évidemment l'équation indéfinie et les conditions spéciales aux six faces. Mais ces produits fourniront-ils toutes les véritables solutions simples du problème? Ou, en d'autres termes, seront-ils suffisants pour que l'état initial $f(x, y, z)$ puisse se répartir entre eux et donner

$$\sum c\cos\alpha x\cos\beta y\cos\gamma z = f(x, y, z)?$$

On reconnaît de la manière suivante qu'ils le seront en effet.

Décomposons par la pensée le parallélépipède en filets prismatiques élémentaires, parallèles aux x, et à surfaces latérales (ou contiguës) rendues, à partir de l'époque $t=0$, imperméables à la chaleur.

Alors chacun de ces filets, ne se refroidissant que par ses deux bouts, aura

Digitized by Google

142. Comparaison, dans ce cas général, des deux refroidissements de la sphère et du cube. — La comparaison des formules (δ') et (ε') de u conduira, pour les durées T′, T de refroidissement de la sphère et du cube, au rapport

$$(\varepsilon'') \qquad \frac{T'}{T} = 3\,\frac{\beta^2}{\beta'^2},$$

---

l'équation indéfinie de ses températures débarrassée des deux termes en $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$. Par suite, l'expression de u y sera justement $\varphi(t, x)$, ou $\sum A e^{-a^2\alpha^2 t}\cos\alpha x$, fonction où l'état initial $f(x, y, z)$ prendra la forme $\sum A\cos\alpha x$, avec des coefficients A, fonctions paires déterminées de y et de z, que l'on calculera par la méthode d'élimination de Fourier. Ainsi, cet état initial est décomposable en états initiaux plus simples, $A\cos\alpha x$, où x ne figure plus que par un facteur commun $\cos\alpha x$. En se donnant alors le coefficient A de ce facteur, fonction paire en y et z, comme état initial de filets prismatiques parallèles aux y (ou de couches normales aux z et isolées les unes des autres), on le décomposera de même en une somme de la forme $\sum A_1\cos\beta y$, avec les A_1 fonctions paires de z et finalement réductibles eux-mêmes, chacun, à une série de la forme $\sum c\cos\gamma z$. Donc, l'état initial $f(x, y, z)$ se trouvera bien alors réduit à des éléments de la forme $c\cos\alpha x\cos\beta y\cos\gamma z$.

S'il n'y avait pas symétrie de l'état initial de part et d'autre des plans diamétraux coordonnés, ou si les conductibilités extérieures $k = hK$ relatives à deux faces parallèles étaient inégales, la température u cesserait d'être fonction paire de x, y, z; et, par exemple, les éléments de $\varphi(t, x)$ prendraient la forme

$$(A\cos\alpha x + B\sin\alpha x)e^{-a^2\alpha^2 t},$$

où non seulement α, mais aussi le rapport de B à A, seraient *deux* constantes, disponibles pour vérifier les conditions relatives aux *deux* limites $x = -a$ et $x = +a$. A cela près, on raisonnerait de même.

Alors il pourrait y avoir avantage, au point de vue de la simplicité des formules, à transporter l'origine à un sommet, c'est-à-dire à faire varier x, y, z de zéro à $2a$, ou à $2b$, ou à $2c$, plutôt qu'entre les limites $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$. C'est ce qui arriverait, notamment, dans le cas où les deux faces $x = \pm a$ seraient maintenues à la température zéro; car de la sorte on pourrait faire $A = 0$, ou ne garder dans $\varphi(t, x)$ que des sinus, avec α multiple de $\frac{\pi}{2a}$. Et si, au contraire, ces deux faces étaient imperméables, on ne garderait que les cosinus, en prenant toujours α multiple de $\frac{\pi}{2a}$ (y compris le multiple zéro).

Mais on voit que, dans tous les cas, les solutions simples sont les produits des termes respectifs de $\varphi(t, x)$, $\varphi_1(t, y)$, $\varphi_2(t, z)$, puisqu'une solution quelconque se résout en celles-là. Et la solution fondamentale, exprimant l'état pénultième, s'obtient bien en multipliant entre eux les trois termes de $\varphi(t, x)$, $\varphi_1(t, y)$, $\varphi_2(t, z)$, où figure la plus petite valeur ou de α, ou de β, ou de γ.

Digitized by Google

où il ne reste plus qu'à chercher, étant donnés $\frac{k}{K}$ et R, les plus petites racines positives des deux équations transcendantes

$$(\varepsilon''') \qquad \beta \operatorname{tang} \beta = \frac{kR}{K}, \qquad \frac{\beta'}{\operatorname{tang} \beta'} = 1 - \frac{kR}{K}.$$

On voit que β, β' dépendent uniquement du rapport $\frac{kR}{K}$, symétrique en $\frac{k}{K}$ et R. Donc, dans le rapport (ε'') des deux durées de refroidissement de la sphère et du cube, ou même dans chacune d'elles, la conductibilité extérieure k et le rayon R entrent pareillement. Ces durées varient, par conséquent, de la même manière, soit quand on fait croître la conductibilité extérieure [1] comme je l'ai supposé tout à l'heure (p. 280), soit quand ce sont les dimensions du corps qu'on fait grandir, comme avait préféré l'admettre Fourier.

Lorsque k tend vers zéro, β et β' y tendent aussi. Alors, si l'on appelle ζ et ζ' leurs tangentes, la formule classique

$$\operatorname{arc\,tang} \zeta = \zeta - \frac{\zeta^3}{3} + \ldots,$$

réduit les premiers membres de ces équations à $\zeta^2 - \ldots$ et à $1 - \frac{\zeta'^2}{3} + \ldots$, ou, sensiblement, à β^2 et à $1 - \frac{\beta'^2}{3}$. Il vient donc $3\beta^2 = \beta'^2 = 3\frac{kR}{K}$; et les deux corps ont, comme nous le savions, la même formule de refroidissement. Dans le cas contraire où k grandit indéfiniment, les seconds membres de (ε''') deviennent respectivement $+\infty$ et $-\infty$: d'où il résulte $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\beta' = \pi$, conformément encore aux résultats ci-dessus.

Le cas intermédiaire paraissant le plus intéressant est celui où $\frac{kR}{K} = 1$; ce qui donne, pour β', la valeur $\frac{\pi}{2}$ ou 1,5708, et, pour β, la racine, comprise entre $\frac{\pi}{4}$ et π, de l'équation $\beta \operatorname{tang} \beta = 1$. On

[1] Il est plus naturel de faire varier la conductibilité extérieure k que la conductibilité intérieure K; car celle-ci, dépendant uniquement de la nature du corps donné, ne se trouve pas à la disposition du physicien comme l'est, pour ainsi dire, la conductibilité extérieure, liée à la nature et à l'état de la couche superficielle, susceptibles d'une infinité de modifications.

Digitized by Google

trouve, après quelques tâtonnements, que cette racine est environ $49^\circ\, 17',6$, c'est-à-dire $0,86034$.

Par suite, le quotient $\frac{T'}{T}$ devient $0,9$ à très peu près. Comme il était $0,862$ dans la double expérience de Fourier, on voit que le rapport $\frac{kR}{K}$ y aurait excédé l'unité si, comme nous le supposons en ce moment, la conductibilité extérieure du cube avait égalé celle de la sphère.

Il y a encore l'hypothèse simple $\operatorname{tang}\beta = 1$, c'est-à-dire $\beta = \frac{kR}{K} = \frac{\pi}{4} = 0,7854$.

Alors β' est la racine, comprise entre $\frac{\pi}{4}$ et π, de l'équation

$$\frac{\beta'}{\operatorname{tang}\beta'} = 1 - \frac{\pi}{4}, \qquad \text{ou} \qquad \beta' \cot\beta' = 0,2146,$$

Quelques essais donnent $\beta' = 81^\circ 24',7$, c'est-à-dire $\beta' = 1,42093$; et le rapport $\frac{T'}{T}$ devient $0,9166$.

Quoique Fourier ne donne pas la valeur, dans ses deux expériences, du rapport $\frac{kR}{K}$, où R était $\frac{1}{2}(0,055) = 0,0275$, on peut admettre, vu les résultats déduits (p. 263 ci-dessus) de l'observation des températures stationnaires d'une armille en fer poli, que le quotient $\frac{K}{k}$ n'y différait pas beaucoup de $7,5$; ce qui devait donner $\frac{kR}{K} = 0,0037$ environ. Cette valeur étant une petite fraction de l'unité, β et β' sont voisins, dans (ε'''), de leurs limites inférieures zéro; et, en posant encore

$$\operatorname{tang}\beta = \zeta, \qquad \operatorname{tang}\beta' = \zeta',$$

on pourra prendre

$$(\eta) \qquad \beta = \zeta - \frac{\zeta^3}{3} + \ldots, \qquad \beta' = \zeta' - \frac{\zeta'^3}{3} + \frac{\zeta'^5}{3} - \ldots;$$

ce qui donnera aux équations (ε''') la forme

$$(\eta') \qquad \zeta^2 - \frac{\zeta^4}{3} + \ldots = \frac{kR}{K}, \qquad \frac{\zeta'^2}{3} - \frac{\zeta'^4}{5} + \ldots = \frac{kR}{K}.$$

Digitized by Google

Il en résulte les valeurs de première approximation

$$\zeta^2 = \frac{kR}{K}, \qquad \zeta'^2 = 3\,\frac{kR}{K},$$

qui, portées dans les termes en ζ^4 et ζ'^4 des équations (η'), donnent, à une seconde approximation,

$$(\eta'') \qquad \zeta^2 = \frac{kR}{K}\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{kR}{K}\right), \qquad \frac{\zeta'^2}{3} = \frac{kR}{K}\left(1 + \frac{9}{5}\,\frac{kR}{K}\right).$$

Or, des relations (η) et de ce que ζ, ζ' diffèrent peu de β, β', il résulte évidemment, à une deuxième approximation, en substituant finalement au premier facteur ζ^2 ou ζ'^2 sa valeur tirée de (η''),

$$\beta^2 = \zeta^2\left(1 - \frac{2}{3}\,\zeta^2\right) = \zeta^2\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{kR}{K}\right) = \frac{kR}{K}\left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{kR}{K}\right),$$

$$\beta'^2 = \zeta'^2\left(1 - \frac{2}{3}\,\zeta'^2\right) = \zeta'^2\left(1 - 2\,\frac{kR}{K}\right) = 3\,\frac{kR}{K}\left(1 - \frac{1}{5}\,\frac{kR}{K}\right);$$

ce qui réduit la formule (ε'') à

$$(\eta''') \qquad \frac{T'}{T} = \frac{1 - \frac{1}{3}\,\frac{kR}{K}}{1 - \frac{1}{5}\,\frac{kR}{K}} = \left(1 - \frac{1}{3}\,\frac{kR}{K}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\,\frac{kR}{K}\right) = 1 - \frac{2}{15}\,\frac{kR}{K}.$$

Avec la valeur 0,0037 de $\frac{kR}{K}$ *supposée* commune à la sphère et au cube, la durée de refroidissement de la sphère n'aurait donc dû être inférieure à celle du cube que de un demi-millième environ de la valeur de celle-ci. Si elle s'est trouvée plus faible, c'est sans doute parce que la sphère était un peu moins bien polie que le cube; ce qui aura suffi pour y accroître dans le rapport de 7 à 8, sinon même plus (d'après ce qu'on a vu p. 263), la conductibilité extérieure k. La seconde formule (α) (p. 274) montre qu'alors les valeurs de t entraînant une réduction relative donnée de u, sont abaissées dans le rapport inverse, qui est de 8 à 7 ou de 1 à 0,875, sinon encore un peu au-dessous, jusqu'à la valeur 0,862 donnée par l'observation.

Digitized by Google

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

ÉTUDE PLUS COMPLÈTE DE LA SPHÈRE; PROBLÈME DU REFROIDISSEMENT DU CYLINDRE CIRCULAIRE.

143. Équations déterminant, dans une sphère, les températures moyennes de chaque couche sphérique et les températures vraies du centre. — Revenons à la sphère, pour traiter moins succinctement les questions qui la concernent, et donnons aussi, dans cette Leçon, une idée de la manière dont peut se résoudre le problème du refroidissement d'un cylindre circulaire.

Supposons que, dans la sphère considérée, chaque couche, de rayon x, ait en ses divers points des températures différentes, que j'appellerai v. Alors l'équation simple aux dérivées partielles obtenue dans la dernière Leçon (p. 276), subsistera, pourvu que u, encore fonction uniquement du temps t et de la distance x au centre, désigne la moyenne de ces températures simultanées v sur toute la surface $4\pi x^2$ de la couche.

En effet, celle-ci, dont j'appellerai S la face interne ou concave, perd par unité de temps, à travers chaque élément $d\mathrm{S}$ de cette face, le flux $\mathrm{K}\frac{dv}{dx}d\mathrm{S}$, ou $\mathrm{K}(4\pi x^2)\frac{dv}{dx}\frac{d\mathrm{S}}{\mathrm{S}}$, $\frac{dv}{dx}$ étant une dérivée prise suivant le prolongement dx du rayon x qui aboutit à un point intérieur de $d\mathrm{S}$; et elle perd par toute la face concave le flux $\mathrm{K}(4\pi x^2)\int_{\mathrm{S}}\frac{dv}{dx}\frac{d\mathrm{S}}{\mathrm{S}}$. Or, quand on passe de la couche de rayon x à celle de rayon $x+dx$, chaque élément $d\mathrm{S}$ d'aire peut être remplacé par l'élément semblable que limitent, prolongées de dx, les droites allant du centre au contour de $d\mathrm{S}$. Alors, le long de chaque rayon où se prend une dérivée $\frac{dv}{dx}$, le rapport $\frac{d\mathrm{S}}{\mathrm{S}}$ est constant, en

Digitized by Google

sorte que $\frac{dv}{dx}\frac{dS}{S}$ est la dérivée en x du produit $v\frac{dS}{S}$; et l'intégrale $\int_S \frac{dv}{dx}\frac{dS}{S}$ est elle-même la dérivée en x de $\int_S v\frac{dS}{S}$. Mais $\int_S v\frac{dS}{S}$ constitue l'expression même de la moyenne u.

Donc le flux total sorti de la couche par unité de temps, à travers sa face concave, égale $4\pi K x^2 \frac{du}{dx}$; et en admettant (pour plus de généralité) que la conductibilité K soit variable d'une couche à l'autre, ou fonction de x, l'excédent, sur cette chaleur perdue, du flux cédé, à travers la face externe ou convexe, par la couche suivante de rayon $x + dx$, sera la différentielle en x de cette expression, c'est-à-dire $4\pi dx \frac{d}{dx}\left(Kx^2\frac{du}{dx}\right)$, absolument comme si chaque couche avait une température uniforme u. Or cet excédent constitue la somme des gains de chaleur par unité de temps, $C\frac{dv}{dt}(dS\,dx)$, qu'acquièrent les divers éléments de volume $dS\,dx$ de la couche, somme dès lors exprimée successivement par

$$C\,dx\int_S \frac{dv}{dt}\,dS = C\,dx\frac{d}{dt}\int_S v\,dS = C\,dx\frac{d.Su}{dt} = CS\,dx\frac{du}{dt} = C\frac{du}{dt}(4\pi x^2 dx),$$

ou admettant aussi, en définitive, la même formule que dans le cas d'une température uniforme u de chaque couche. On aura donc, pour régir les températures moyennes u, l'équation aux dérivées partielles

$$Cx^2\frac{du}{dt} = \frac{d}{dx}\left(Kx^2\frac{du}{dx}\right),$$

où la capacité calorifique C peut, comme la conductibilité K, varier d'une couche à l'autre, c'est-à-dire être une fonction également donnée de x.

A la surface σ ou $4\pi R^2$, dont les divers éléments $d\sigma$ seront supposés (généralement) recevoir du dehors, par unités d'aire et de temps, des flux $k(u_e - v)$ proportionnels aux excès de températures extérieures inégales données u_e sur les températures intérieures v, on aura, sous chaque élément $d\sigma$, $K\frac{dv}{dx}d\sigma = k(u_e - v)d\sigma$, et, par suite, sous toute la surface,

$$K\int_\sigma \frac{dv}{dx}d\sigma = k\left(\int_\sigma u_e d\sigma - \int_\sigma v\,d\sigma\right).$$

Digitized by Google

Or $\int_\sigma \frac{dv}{dx} d\sigma$ n'est autre chose que l'expression $S \int_S \frac{dv}{dx} \frac{dS}{S}$, ou $S \frac{du}{dx}$, prise à la limite $x = R$, c'est-à-dire le produit de σ par la dérivée $\frac{du}{dx}$ à la surface; et, d'autre part, $\int_\sigma v\, d\sigma$ y exprime le produit $u\sigma$.

Divisée par σ, la relation définie qu'il faudra joindre à l'équation indéfinie précédente sera donc

$$(\text{pour } x = R) \qquad K\frac{du}{dx} = k\left(\int_\sigma u_e \frac{d\sigma}{\sigma} - u\right).$$

En d'autres termes, *les températures moyennes, u, des couches sphériques, se calculeront comme si les températures vraies à chaque instant leur étaient égales, et que la température extérieure u_e n'eût également, sur toute la surface, que sa valeur moyenne* $\int_\sigma u_e \frac{d\sigma}{\sigma}$.

Au centre, ou pour $x = 0$, la température vraie, étant unique, se confond avec la moyenne u. Ainsi, quelque compliqués que soient l'état initial de la sphère et le mode de variation des températures extérieures u_e, tant d'un point à l'autre de la surface que d'un instant à l'autre, on aura la température, variable ou constante, du centre, en raisonnant comme si ces températures u_e se confondaient avec leur moyenne sur toute la surface et que la température initiale de chaque couche sphérique fût, elle aussi, égale à sa valeur moyenne.

Supposons, par exemple, stationnaires les températures extérieures u_e; et admettons que l'état de la sphère soit devenu permanent. Alors l'équation indéfinie ci-dessus (p. 290), ayant son premier membre réduit à zéro par l'annulation de $\frac{du}{dt}$, montrera que le produit $Kx^2 \frac{du}{dx}$ est constant, et qu'il s'annule partout comme au centre, où le facteur x^2 est nul sans que la température (supposée graduellement variable dans tout l'intérieur) y ait sa dérivée en x infinie. Donc on a $\frac{du}{dx} = 0$ ou $u = \text{const.}$; et la condition spéciale à la surface σ devient $u = \int_\sigma u_e \frac{d\sigma}{\sigma}$. Ainsi, *la*

Digitized by Google

température permanente au centre de la sphère égale la moyenne des températures régnant sur la surface (¹).

144. Extension des formules de refroidissement aux corps diathermanes. — Mais, revenant au cas d'un état variable, supposons notre sphère diathermane et son éther à une température moyenne des températures extérieures u_e. Chaque élément $dS\,dx$ de couche sphérique recevra de l'éther, par unité de temps, un supplément de chaleur exprimé par $L\left(\int_\sigma u_e \frac{d\sigma}{\sigma} - v\right) dS\,dx$, donnant, pour toute la couche $S\,dx$ ou $4\pi x^2\,dx$, le total

$$(4\pi x^2 dx)\,L\left(\int_\sigma u_e \frac{d\sigma}{\sigma} - \int_S v \frac{dS}{S}\right) = (4\pi x^2 dx)\,L\left(\int_\sigma u_e \frac{d\sigma}{\sigma} - u\right).$$

Donc il s'ajoutera au second membre de l'équation indéfinie ci-dessus en u (p. 290), ou il se retranchera du premier membre, après suppression du facteur commun $4\pi dx$, le terme

$$Lx^2\left(\int_\sigma u_e \frac{d\sigma}{\sigma} - u\right).$$

Quand il s'agira, en particulier, d'un phénomène de refroidissement, effectué à des températures extérieures u_e constantes et dont la moyenne sera choisie comme zéro de température, les équations en u du problème deviendront, en posant $L = C\lambda$ et appelant $f(x)$ les températures initiales moyennes des couches :

$$Cx^2\left(\frac{du}{dt} + \lambda u\right) = \frac{d}{dx}\left(Kx^2 \frac{du}{dx}\right),$$

$$(\text{pour } x = R) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{k}{K} u = 0,$$

$$(\text{pour } t = 0) \qquad u = f(x).$$

Et si le rapport λ de L à C est constant, c'est-à-dire indépendant de x, il suffira de poser

$$u = e^{-\lambda t}\varphi,$$

(¹) Nous retrouverons tout autrement dans la XXVIe Leçon cette loi, due à Poisson (du moins pour les sphères homogènes que nous aurons à y étudier).

Digitized by Google

où φ désignera une fonction auxiliaire de x et de t, pour donner à ces relations la forme

$$Cx^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dx}\left(Kx^2\frac{d\varphi}{dx}\right),$$

$$(\text{pour } x = R) \qquad \frac{d\varphi}{dx} + \frac{k}{K}\varphi = 0,$$

$$(\text{pour } t = 0) \qquad \varphi = f(x).$$

Or cette forme est identique à celle des équations de refroidissement de la même sphère, et à mêmes températures initiales moyennes des couches, mais supposée athermane. Donc la diathermanéité a simplement pour effet d'activer le refroidissement sans en changer d'ailleurs les lois, puisqu'elle multiplie par le facteur commun décroissant $e^{-\lambda t}$ les températures φ de toutes les couches de la sphère athermane.

Cette remarque s'appliquerait à un corps de forme quelconque se refroidissant dans un milieu à zéro, et aux températures non plus seulement moyennes, de leurs couches, mais effectives en leurs divers points. Un coup d'œil jeté sur les équations (187), (188), (189) du problème général du refroidissement (p. 229), montre en effet que, si l'on y pose

$$L = C\lambda, \qquad \text{avec } \lambda \text{ constant, et} \qquad u = e^{-\lambda t}\varphi,$$

les équations en φ seront simplement les équations en u, débarrassées du terme $-Lu$ dû à la diathermanéité.

145. **Problème général du refroidissement de la sphère homogène et isotrope; manière de le traiter par les fonctions sphériques.** — Le calcul des températures propres des divers points des couches, dans le problème général du refroidissement d'une sphère athermane, isotrope et homogène, d'un rayon donné R, serait beaucoup plus compliqué que celui des températures moyennes de ces couches; car, en supposant que chaque point eût été d'abord rapporté à un système d'axes rectangulaires des x, y, z émanés du centre, il y interviendrait comme variables fixant la position du point (x, y, z), outre le rayon vecteur

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

deux coordonnées angulaires pour définir sa direction. Ce seraient,

Digitized by Google

par exemple, un *azimut* θ et une *hauteur* (angulaire) λ, ou mieux, en vue d'une plus grande symétrie, les trois cosinus directeurs

$$(\alpha) \qquad X = \frac{x}{r}, \qquad Y = \frac{y}{r}, \qquad Z = \frac{z}{r},$$

dont les carrés ont pour somme l'unité, et dont les dérivées en x, par exemple, sont

$$(\alpha') \qquad \frac{1 - X^2}{r}, \qquad \frac{-XY}{r}, \qquad \frac{-XZ}{r},$$

tandis que la dérivée analogue de r est simplement X.

Ce beau problème du refroidissement de la sphère a été résolu par Laplace (tome V de la *Mécanique céleste*, livre XI, chap. IV) et traité aussi par Poisson (*Théorie mathématique de la chaleur*, p. 359 à 378). Ils ont donné à u, par rapport aux cosinus directeurs X, Y, Z, la forme d'une série entière se composant, à des facteurs près où X, Y, Z ne figurent pas, de tous les polynomes homogènes et distincts possibles P, en X, Y, Z, qui vérifient l'équation

$$(\alpha'') \qquad \frac{d^2 P}{dX^2} + \frac{d^2 P}{dY^2} + \frac{d^2 P}{dZ^2} = 0.$$

On forme tous ceux d'entre eux qui sont de chaque degré n, en portant, dans cette équation (α''), le polynome homogène le plus général de ce degré. Le premier membre devient alors un polynome homogène de degré $n - 2$, dont on annule chaque coefficient total. Cela donne un certain nombre d'équations homogènes du premier degré entre les coefficients du proposé, pour déterminer un pareil nombre de ces coefficients, en fonction linéaire des autres restés arbitraires; et il y a autant de ceux-ci que l'indique l'excédent du nombre des coefficients du polynome homogène de degré n sur celui des coefficients du polynome homogène de degré $n - 2$, excédent que l'on reconnaît être $2n + 1$. Alors, dans le polynome proposé de degré n, les polynomes partiels multipliant chaque coefficient resté arbitraire sont justement ceux que nous appelons P.

Les plus simples d'entre eux, quand on les exprime, au moyen d'un azimut (ou d'une *longitude*) θ et d'une hauteur angulaire

Digitized by Google

(ou d'une *latitude*) λ, par les formules

$$X = \cos\lambda\cos\theta, \qquad Y = \cos\lambda\sin\theta, \qquad Z = \sin\lambda,$$

sont le produit du cosinus ou du sinus d'un multiple de l'azimut, $l\theta$, atteignant au plus $n\theta$, par $\cos^l\lambda$ et par un polynome de degré $n - l$ en $\sin\lambda$ ou Z, déterminé justement (¹) de manière qu'un tel produit vérifie l'équation (α''). Or, en prenant successivement le cosinus et le sinus de $l\theta$ avec $l = 1, = 2, = 3, \ldots, = n$, et aussi $\cos 0\theta$ ou 1, puis multipliant les polynomes P correspondants par tout autant de constantes arbitraires et faisant la somme, on forme le polynome P le plus général de degré n; car il contient le nombre $2n + 1$ de coefficients disponibles juste nécessaire et suffisant pour cela. Ainsi décomposés et exprimés, les polynomes P sont dits *fonctions sphériques*.

Le développement admis par Laplace est-il légitime? Autrement dit, une fonction continue des diverses *directions* autour d'un centre, ou des trois cosinus directeurs X, Y, Z, comme la température de nos couches sphériques, est-elle toujours réductible à une série convergente procédant suivant les polynomes P? C'est ce que Poisson, et plusieurs géomètres après lui, ont démontré de mieux en mieux. Contentons-nous ici d'indiquer une analogie qui conduit à ce développement, comme généralisation naturelle de la série trigonométrique de Fourier mise en vue par le problème de l'armille.

Elle nous sera fournie par toute fonction continue de la *direction* non plus dans l'espace à trois dimensions, mais dans le plan, cas où les cosinus directeurs se réduiront à X, Y et égaleront $\cos\theta$, $\sin\theta$, si θ désigne l'*azimut* de la direction considérée, compté à partir de l'axe des x. Alors l'équation (α''), débarrassée de son troisième terme, a pour intégrale générale, sous une forme symbolique, la somme d'une fonction arbitraire de $X + Y\sqrt{-1}$ et d'une autre fonction arbitraire de $X - Y\sqrt{-1}$; en sorte que

(¹) Ce polynome, en Z^{n-l}, Z^{n-l-2}, Z^{n-l-4}, .. , est, au fond, homogène de degré $n - l$ en X, Y, Z, comme il le faut pour que P le soit lui-même de degré n; car Z^{n-l-2}, Z^{n-l-4}, ..., peuvent y être censés multipliés, respectivement, par $X^2 + Y^2 + Z^2$, par $(X^2 + Y^2 + Z^2)^2$, etc.

Digitized by Google

les polynomes P (réels) de degré n sont proportionnels ou à la somme, ou à la différence, des deux puissances $(X \pm Y\sqrt{-1})^n$.

Ils se réduisent donc à deux, quel que soit n, et sont respectivement

$$X^n - \frac{n(n-1)}{1.2} X^{n-2} Y^2 + \ldots,$$

$$\frac{n}{1} X^{n-1} Y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} X^{n-3} Y^3 + \ldots.$$

c'est-à-dire, d'après la formule de Moivre,

$$\cos n\theta, \qquad \sin n\theta.$$

Dès lors, le développement proposé n'est autre que la série trigonométrique de Fourier, propre, en effet, à développer linéairement, suivant les cosinus et les sinus des multiples de θ, toute fonction de l'azimut θ, continue (ou même à discontinuités isolées) et admettant, comme les directions qu'il définit, la période 2π.

Ainsi la série de Laplace constitue l'extension naturelle, à toute fonction continue des *directions* dans l'espace, de la série de Fourier appliquée aux fonctions des directions dans le plan [1].

---

[1] **Calcul des variations de température d'une enveloppe sphérique à faces imperméables.** — Cette série de Laplace pourrait être, aussi, justifiée synthétiquement à la manière dont l'a été plus haut (p. 269) la série même de Fourier, c'est-à-dire en tant que comprise, comme cas particulier, dans la formule générale (226) (p. 250), exprimant la décomposition, en parties relatives aux diverses solutions simples, de la température initiale d'un corps à contexture symétrique. Les polynomes P ne sont autres, en effet, que les facteurs U des solutions simples $ce^{-a^2\alpha^2 t}U$, quand le corps se réduit à une mince enveloppe sphérique isotrope, de rayons r et $r+\varepsilon$, ayant son centre à l'origine et ses deux faces imperméables à la chaleur. Les flux y étant nuls à travers celles-ci, la dérivée de u le long de chaque rayon égale zéro pour les valeurs r et $r+\varepsilon$ de ce rayon; d'où il suit que, à des écarts près négligeables jusque dans le calcul des dérivées partielles secondes de u, la température varie seulement, à un moment t quelconque, avec la *direction* des rayons aux points considérés, non avec leurs longueurs.

Ainsi, les diverses valeurs de U y seront fonction uniquement des cosinus directeurs X, Y, Z, ou même des deux rapports $\frac{Y}{X}$, $\frac{Z}{X}$, puisque, grâce à la relation $X^2+Y^2+Z^2=1$, les trois cosinus s'expriment par le moyen de ces deux rapports. Et chacune d'elles, U, alors fonction homogène de degré zéro en X, Y, Z, deviendra même, si on la multiplie par $(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{n}{2}}$, de tel degré n qu'on voudra.

Cela posé, et les dérivées en x de X, Y, Z, étant (α'), une première différen-

Digitized by Google

146. Formation des solutions simples. — Cela posé, les solutions simples de notre problème étant de la forme $ce^{-a^2\alpha^2 t}U$, avec U fonction de r, X, Y, Z, régi par les deux relations, l'une

---

tiation de U en x donne

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{r}\left[\frac{dU}{dX} - X\left(X\frac{dU}{dX} + Y\frac{dU}{dY} + Z\frac{dU}{dZ}\right)\right],$$

ou, vu le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes,

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{r}\left(\frac{dU}{dX} - nXU\right).$$

La dérivée de r en x étant X, une nouvelle différentiation donne de même

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{X}{r^2}\left(\frac{dU}{dX} - nXU\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{d}{dX} - X\left(X\frac{d}{dX} + Y\frac{d}{dY} + Z\frac{d}{dz}\right)\right]\left(\frac{dU}{dX} - nXU\right),$$

c'est-à-dire, en développant et appliquant encore le théorème d'Euler aux deux fonctions $\frac{dU}{dX}$, XU, de degrés $n-1$ et $n+1$,

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2U}{dx^2} &= \frac{1}{r^2}\left(-X\frac{dU}{dX} + nX^2U\right) \\ &+ \frac{1}{r^2}\left\{\frac{d^2U}{dX^2} - n\left(X\frac{dU}{dX} + U\right) - X\left[(n-1)\frac{dU}{dX} - n(n+1)XU\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

Ajoutons à cette expression les deux dérivées secondes analogues de U par rapport à y et à z, en appliquant encore le théorème d'Euler à des sommes de termes correspondants, en $\frac{dU}{d(X, Y, Z)}$, et souvenons-nous d'ailleurs que

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

Il viendra, par des réductions évidentes,

$$\Delta_2 U = \frac{1}{r^2}\left[\frac{d^2U}{dX^2} + \frac{d^2U}{dY^2} + \frac{d^2U}{dZ^2} - n(n+1)U\right].$$

L'équation indéfinie en U, savoir $\Delta_2 U = -\alpha^2 U$, devient donc, multipliée par r^2,

$$\frac{d^2U}{dX^2} + \frac{d^2U}{dY^2} + \frac{d^2U}{dZ^2} = [n(n+1) - r^2\alpha^2]U.$$

Comme le degré n d'homogénéité est disponible, choisissons-le de manière à faire annuler le second membre, ou posons

$$(a')\qquad n(n+1) = r^2\alpha^2, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad n = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \alpha^2 r^2};$$

et l'équation indéfinie en U sera simplement

$$(a'')\qquad \frac{d^2U}{dX^2} + \frac{d^2U}{dY^2} + \frac{d^2U}{dZ^2} = 0.$$

Ainsi, toutes les expressions à chercher de U, homogènes en X, Y, Z, devront

Digitized by Google

indéfinie, l'autre spéciale à la surface,

$$(\beta) \qquad \Delta_2 U + \alpha^2 U = 0, \qquad (\text{pour } r = R)\ \frac{dU}{dr} + hU = 0,$$

Laplace et Poisson prennent donc pour U un produit de la forme ρP, où ρ désigne une fonction de r seul.

---

vérifier l'équation *commune* (a''), tant dans le cas d'une enveloppe sphérique complète, que dans celui d'un fragment d'enveloppe ou membrane sphérique.

S'il s'agit d'un fragment, la condition relative à son contour viendra particulariser davantage la forme de U et son degré n d'homogénéité, degré lié par l'équation (a') au paramètre positif α^2 ou au *coefficient d'extinction* $a^2\alpha^2$ de l'exponentielle $e^{-a^2\alpha^2 t}$.

Mais si, au contraire, la membrane est une enveloppe complète ou fermée, la seule condition supplémentaire régissant U sera que cette fonction homogène continue retrouve sa valeur primitive en chaque point de la sphère, quand on y reviendra après avoir cheminé à volonté sur la sphère en le quittant. Or cette condition de continuité, ou plutôt de raccordement et de périodicité, est satisfaite, lorsqu'on prend la fonction homogène U rationnelle et entière, c'est-à-dire quand on la réduit à un quelconque des polynomes P. Si donc on admet que les polynomes P soient les *seules* solutions homogènes de l'équation (a'') n'admettant ainsi, chacune, qu'une valeur unique, une seule détermination, en chaque point de la sphère, la décomposition $\Sigma c U$ de l'état initial u_0, en ses parties répondant aux diverses solutions simples, constituera justement une série $\Sigma c P$ de Laplace. Mais pourrait-on prouver, d'une manière simple, que les seules solutions homogènes de l'équation indéfinie (a''), périodiques le long de tout contour fermé tracé sur la sphère, et ayant comme période la longueur même du contour, sont les solutions rationnelles et entières ?

La démonstration serait facile, si l'on avait seulement deux cosinus directeurs X, Y, ou s'il s'agissait non d'une enveloppe sphérique, mais d'un étroit disque annulaire de rayons intérieur et extérieur r, $r + \varepsilon$, à bases imperméables comme ses deux bords, posé sur le plan des xy. Car alors $\Delta_2 U$, réduit à

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2},$$

devient, vu la formule (a) et une formule analogue pour la dérivée seconde de U en y, l'expression

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2 U}{dX^2} + \frac{d^2 U}{dY^2} - n^2 U\right).$$

On voit donc qu'en prenant $n = \pm \alpha r$, l'on obtient, en U, l'équation indéfinie (a''), sans son troisième terme. D'ailleurs, les cosinus X, Y étant alors $\cos\theta$, $\sin\theta$, en fonction d'un azimut θ variable de zéro à 2π, les dérivées premières de X, Y en θ sont respectivement $-Y$, X; et deux dérivations successives de U par rapport à θ donnent, d'abord,

$$\frac{dU}{d\theta} = -Y\frac{dU}{dX} + X\frac{dU}{dY},$$

Digitized by Google

Pour calculer $\Delta_2 U$, différentions d'abord ρP en x. Il vient immédiatement, vu les dérivées données ci-dessus (p. 294) de r, X, Y et Z en x,

$$\frac{d.\rho P}{dx} = \frac{d\rho}{dr} XP + \frac{\rho}{r}\left[\frac{dP}{dX} - X\left(X\frac{dP}{dX} + Y\frac{dP}{dY} + Z\frac{dP}{dZ}\right)\right],$$

ou bien, en observant que le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes donne nP comme valeur du trinome entre parenthèse,

$$\frac{d.\rho P}{dx} = \left(\frac{d\rho}{dr} - \frac{n}{r}\rho\right)(XP) + \frac{\rho}{r}\frac{dP}{dX}.$$

---

puis, en échangeant finalement entre elles les deux quantités égales $-\frac{d^2U}{dX^2}$, $\frac{d^2U}{dY^2}$,

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = -Y\left(-Y\frac{d^2U}{dX^2} + X\frac{d^2U}{dX\,dY}\right) + X\left(-Y\frac{d^2U}{dX\,dY} + X\frac{d^2U}{dY^2}\right) - X\frac{dU}{dX} - Y\frac{dU}{dY}$$
$$= -\left(X\frac{d}{dX} + Y\frac{d}{dY}\right)\left(X\frac{dU}{dX} + Y\frac{dU}{dY}\right),$$

c'est-à-dire $\left(\text{vu la formule } X\frac{dU}{dX} + Y\frac{dU}{dY} = nU\right)$,

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = -n^2U.$$

Ainsi, la fonction U a forcément, en θ, la forme

$$A\cos n\theta + B\sin n\theta;$$

et elle ne retrouve sa valeur sur l'anneau, quand θ croît de 2π, que si le degré n d'homogénéité est entier. On peut même, en changeant au besoin le signe de B, supposer n positif; et alors U se réduit bien à un polynome en X et Y.

Mais revenons au cas d'une enveloppe sphérique complète. Les géomètres y ayant démontré effectivement la développabilité, par la série de Laplace, d'une fonction arbitraire u_0 donnée sur toute la surface, il résulte, *a posteriori*, de l'impossibilité de deux développements ΣcU différents (p. 250), que les polynomes P constituent bien toutes les fonctions U possibles, et, par conséquent, toutes les solutions homogènes de l'équation (a'') qui ont une valeur unique en chaque point de la sphère.

Jusqu'à présent, dès qu'on a voulu traiter des problèmes de refroidissement comportant plus d'une coordonnée, c'est seulement, il me semble, de cette manière, savoir, *a posteriori*, qu'on a pu démontrer, comme *nécessaire*, la forme obtenue des solutions simples. On a vu plus haut (p. 285), pour le parallélépipède, et l'on verra ci-après (p. 306 et 312), pour la sphère et le cylindre, comment on y parvient le plus souvent.

Digitized by Google

Une seconde différentiation en x se fera d'après cette formule même de $\frac{d.\rho P}{dx}$, si l'on observe que chacun des deux termes obtenus au second membre est encore, comme ρP, le produit d'une fonction de r seul par un polynome homogène en X, Y, Z, savoir, par XP, du degré $n+1$, dans le premier terme, et par $\frac{dP}{dX}$, du degré $n-1$, dans le second. On aura donc

$$\frac{d^2.\rho P}{dx^2} = X^2 P\left(\frac{d}{dr} - \frac{n+1}{r}\right)\left(\frac{d\rho}{dr} - \frac{n}{r}\rho\right)$$
$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{d\rho}{dr} - \frac{n}{r}\rho\right)\frac{d.XP}{dX} + \left(\frac{d\frac{\rho}{r}}{dr} - \frac{n-1}{r}\frac{\rho}{r}\right)X\frac{dP}{dX} + \frac{\rho}{r^2}\frac{d^2P}{dX^2}.$$

Écrivons au-dessous les dérivées secondes analogues de ρP soit en y, soit en z; puis, en ajoutant terme à terme, observons que la somme $X^2 + Y^2 + Z^2$ vaut l'unité, que $X\frac{dP}{dX} + Y\frac{dP}{dY} + Z\frac{dP}{dZ}$ est nP, que

$$\frac{d.XP}{dX} + \frac{d.YP}{dY} + \frac{d.ZP}{dZ} = X\frac{dP}{dX} + Y\frac{dP}{dY} + Z\frac{dP}{dZ} + 3P = (n+3)P,$$

et enfin que, d'après (α''), la somme des trois dérivées secondes directes de P en X, Y, Z est nulle. Nous aurons

$$\Delta_2.\rho P = \left[\left(\frac{d}{dr} - \frac{n+1}{r}\right)\left(\frac{d\rho}{dr} - \frac{n}{r}\rho\right)\right.$$
$$\left. + \frac{n+3}{r}\left(\frac{d\rho}{dr} - \frac{n}{r}\rho\right) + n\left(\frac{d\frac{\rho}{r}}{dr} - \frac{n-1}{r^2}\rho\right)\right]P.$$

Enfin, développons l'expression entre crochets, sans effectuer la différentiation en r de $\frac{\rho}{r}$, figurant dans deux termes qui s'entre-détruisent; et il viendra

$$(\gamma) \quad \Delta_2.\rho P = \left(\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\rho}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}\rho\right)P = \left(\frac{d^2.r\rho}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}r\rho\right)\frac{P}{r};$$

ce qui réduit notre équation indéfinie (β), multipliée par $\frac{r}{\alpha^2}$, à

$$(\gamma') \qquad \frac{d^2.r\rho}{(d.\alpha r)^2} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{(\alpha r)^2}\right]r\rho = 0.$$

Digitized by Google

La fonction $r\rho$, d'ailleurs nulle (et non pas infinie) au centre où $r = 0$, est, par suite, une fonction de Fourier ou de Bessel exprimée en intégrale définie par la formule

$$(\gamma'') \qquad r\rho = (\alpha r)^{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\omega \cos(\alpha r \cos\omega)\, d\omega,$$

et développable en série suivant les puissances ascendantes de αr.

Cela résulte, par exemple, des formules comparées (79), (80) et (84) de la XLIe de mes Leçons d'*Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Compléments*, p. 308* à 310*).

On peut aussi exprimer $r\rho$ sous forme finie et rationnelle en αr, $\sin\alpha r$ et $\cos\alpha r$. A cet effet, prenons, sous le signe $\int$, la nouvelle variable d'intégration $\mu = \alpha r \cos\omega$, et appelons I_n l'expression de $r\rho$. Il vient

$$I_n = \int_0^{\alpha r} \left(\alpha r - \frac{\mu^2}{\alpha r}\right)^n \cos\mu\, d\mu:$$

d'où résulte, pour I_0, la valeur $\sin\alpha r$ et, pour I_1, en effectuant une intégration par parties où $\sin\mu$ est le facteur intégré, la valeur

$$I_1 = \frac{2}{\alpha r}\int_0^{\alpha r} \mu \sin\mu\, d\mu = \frac{2}{\alpha r}(\sin\mu - \mu\cos\mu)_0^{\alpha r} = 2\left(\frac{\sin\alpha r}{\alpha r} - \cos\alpha r\right).$$

Pour $n > 1$, la même intégration par parties, suivie d'une autre où $\cos\mu$ est le facteur intégré, donne, presque immédiatement,

$$I_n = 2n\left[\frac{2n-1}{\alpha r} I_{n-1} - (2n-2) I_{n-2}\right],$$

formule de réduction qui fera connaître successivement $I_2, I_3, \ldots$.

Par suite, la seconde équation (β), spéciale à la surface $r = R$ de la sphère et devenue, d'ailleurs,

$$\frac{d.r\rho}{d(\alpha r)} + \frac{hR - 1}{\alpha R} r\rho = 0 \text{ (pour } r = R),$$

donne aisément, après suppression des racines $\alpha = 0$ (correspon-

Digitized by Google

dant à un état permanent ou final qui est ici $u = 0$), l'équation transcendante en α,

$$(\gamma''') \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\omega\,[(hR+n)\cos(\alpha R\cos\omega) - \alpha R\cos\omega\,\sin(\alpha R\cos\omega)]\,d\omega = 0.$$

Cette équation deviendrait, naturellement, rationnelle en αR, $\cos\alpha R$ et $\sin\alpha R$, si l'on employait à la former l'expression réduite I_n de $r\rho$.

Ses racines α seront différentes suivant la valeur donnée au degré n du polynome homogène P : il faudra donc les déterminer successivement dans les cas $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ... Mais on voit que, pour chaque valeur de n, elles seront communes à tous les polynomes P du même degré n (au nombre de $2n + 1$). On devra donc les regarder comme d'un ordre de multiplicité égal à ce nombre même des polynomes P de chaque degré, puisque, à chacune d'elles, il correspondra autant de solutions simples, distinctes, $ce^{-a^2\alpha^2 t}\rho P$, qu'il y aura de ces polynomes.

Pour le degré $n = 0$, où les cosinus directeurs n'entrent pas dans les solutions simples et où, par suite, on peut prendre $P = \text{const.} = 1$, ce degré est l'unité. Il serait aisé de voir qu'alors la formule (γ'') de $r\rho$ se réduit à $\sin(\alpha r)$, conformément à ce qu'on a vu dans la Leçon précédente.

Quel que soit n, chaque valeur de αR ne varie, d'après (γ'''), qu'avec le paramètre hR, ou $\frac{kR}{K}$, comme dans le cas simple de $n = 0$, où nous en avions fait la remarque (p. 286).

147. Détermination des coefficients d'amplitude par la méthode de Fourier. — Quoique notre but, ici, soit seulement d'acquérir une notion, nette sans doute, mais très sommaire, du procédé d'intégration de Laplace par fonctions sphériques, ne quittons pas ce sujet sans avoir constaté que les intégrales particulières $ce^{-a^2\alpha^2 t}\rho P$ sont bien, dans le problème du refroidissement de la sphère, les véritables éléments de l'intégrale générale, c'est-à-dire ces *solutions simples, à produits* (deux à deux) *nuls en moyenne*, dont notre analyse nous a indiqué l'existence dans tout corps.

A cet effet, prouvons d'abord, pour les polynomes P soit à trois

Digitized by Google

cosinus directeurs X, Y, Z, soit à deux seulement X et Y, que le produit de deux d'entre eux, P, P′, *de degrés différents* n et n', considéré successivement dans toutes les directions ou de l'espace, ou du plan, a la valeur moyenne zéro.

Nous partirons de l'expression des paramètres différentiels Δ_2 de P et de P′. Cette expression résulte, dans le cas de l'espace, de la formule (γ), en y faisant, par exemple, $\rho = 1$. Il vient

$$(\delta) \qquad \Delta_2 P = -\frac{n(n+1)}{r^2} P,$$

tandis que, dans le plan (à deux coordonnées x et y), on trouverait de même

$$(\delta') \qquad \Delta_2 P = -\frac{n^2}{r^2} P.$$

Ainsi, à la distance $r = 1$, par exemple, du centre, ou *sur la figure de rayon* 1 *décrite autour de l'origine, le paramètre* Δ_2 *des polynomes* P *est le produit de ces polynomes, changés de signe, par le nombre constant positif* $n(n+1)$ *ou* n^2, *suivant que l'espace étudié a trois ou deux dimensions.*

Soit ν le facteur $n+1$ ou n; et, observant que les polynomes P sont invariables le long de toute droite r émanée de l'origine, ne les considérons, en effet, pour fixer les idées, qu'à une certaine distance r du centre, ou auprès. Nous aurons

$$\Delta_2 P = -\frac{n\nu}{r^2} P, \qquad \Delta_2 P' = -\frac{n'\nu'}{r^2} P'.$$

Appelons d'ailleurs σ la figure fermée de rayon r (sphérique ou circulaire) ainsi décrite autour de l'origine; et soit ϖ l'espace, d'une épaisseur ou largeur infiniment petite constante ε, qui l'environne, espace compris entre les deux figures de rayons respectifs r, $r+\varepsilon$. Cela posé, multiplions les deux expressions ci-dessus de $\Delta_2 P$, $\Delta_2 P'$ par $-P' d\varpi$, $P d\varpi$, en prenant l'élément $d\varpi$ de cet espace environnant σ, soit de la forme $dx\,dy\ldots$, soit de la forme non moins évidente $\varepsilon d\sigma$. Puis ajoutons, et intégrons dans tout l'espace ϖ. Une transformation immédiate de la différence

Digitized by Google

$P\Delta_2 P' - P'\Delta_2 P$, où Δ_2 signifie $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \ldots$, donnera

$$\iint \cdots \left[\frac{d}{dx}\left(P\frac{dP'}{dx} - P'\frac{dP}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(P\frac{dP'}{dy} - P'\frac{dP}{dy}\right) + \ldots\right] dx\,dy\ldots = \varepsilon\frac{n\nu - n'\nu'}{r^2}\int PP'\,d\sigma.$$

Or chacun des deux ou trois termes du premier membre, sous les signes $\iint \cdots$, est intégrable une fois et convertible, par un procédé qui nous est familier, en une intégrale prise sur les deux figures limitant ϖ, de rayons respectifs r, $r + \varepsilon$. Ajoutées, les trois intégrales ainsi obtenues ont comme élément total, sur chaque figure, son élément même, multiplié par l'expression

$$P\frac{dP'}{dn} - P'\frac{dP}{dn},$$

où dn est la normale correspondante, tirée vers le dehors de ϖ. Mais cette normale fait justement partie d'un rayon suivant lequel P' et P ne varient pas. Donc l'intégrale constituant le premier membre est nulle; et, vu, d'ailleurs, l'inégalité $n\nu \gtrless n'\nu'$, il vient

$$(\delta'') \qquad \int_\sigma PP'\,d\sigma = 0.$$

Ainsi, *le produit de deux fonctions* P *de degré différent est nul en moyenne* (¹).

Considérons maintenant *deux* polynomes distincts, P, P', d'un *même* degré n (dès lors supérieur à zéro); mais admettons que ce soient des fonctions sphériques *simples*, c'est-à-dire ayant, à tous les termes, un seul et même facteur en θ, cosinus ou sinus d'un multiple, $l\theta$, de l'azimut, et qui se réduirait à $\cos 0$ ou 1, pour $l = 0$. Quant au cas de l'espace plan, il rentre dans celui de l'espace à trois dimensions, en faisant simplement $l = n$. Le produit

(¹) En tenant compte de la note des pages 296 à 299, cela résultait évidemment de ce fait, que P, P' sont, pour une enveloppe sphérique complète à faces imperméables, ou pour un mince anneau complet imperméable aussi, deux fonctions U correspondant à des exponentielles en t différentes, savoir à $e^{-\frac{n\nu a^2 t}{r^2}}$ et à $e^{-\frac{n'\nu' a^2 t}{r^2}}$.

Digitized by Google

PP′ sera donc proportionnel à un facteur en θ de l'une des formes

$$(\cos l\theta \text{ ou } \sin l\theta) \times (\cos l'\theta \text{ ou } \sin l'\theta), \quad \text{avec } l \text{ et } l' \text{ inégaux,}$$

ou

$$\cos l\theta \sin l\theta, \quad \text{avec} \quad l > 0.$$

Or, entre les limites $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, tous ces produits ont leur valeur moyenne nulle. Donc *la relation* $\int_\sigma PP' d\sigma = 0$ *s'étend aux polynomes simples* P *d'un même degré*, et sans même qu'on ait besoin, dans l'espace à trois dimensions, de faire varier la *hauteur* (angulaire) λ, c'est-à-dire en considérant seulement les directions (X, Y, Z) normales à la sphère le long d'un même (cercle) *parallèle* $\lambda = \text{const}$.

Par suite, si l'on a deux solutions simples de la forme $e^{-a^2\alpha^2 t}\rho P$, où paraissent des polynomes P différents, leur produit, proportionnel, sur toute figure σ d'un rayon r constant décrite autour de l'origine, au produit de ces deux polynomes, aura zéro pour valeur moyenne aux divers points de σ et, à plus forte raison, dans tout l'espace (sphérique ou circulaire) compris entre deux figures σ quelconques, notamment, ici, dans la sphère donnée, de rayon R. Et s'il s'agit, au contraire, de deux solutions $e^{-a^2\alpha^2 t}\rho P$ correspondant à un même polynome P, les valeurs de α y seront deux racines distinctes de l'équation transcendante (γ''') posée pour le degré n du polynome : alors, les deux exponentielles $e^{-a^2\alpha^2 t}$ se trouvant différentes, la formule (222) (p. 246) s'appliquera. Donc, dans tous les cas, deux solutions simples distinctes $ce^{-mt}\rho P$, formées comme il a été dit, auront leur produit nul en moyenne dans tout l'intérieur de la sphère ; et les amplitudes c s'évalueront par la méthode d'élimination de Fourier [1].

---

[1] On étendra aisément ces réflexions aux cas, abordés ci-après, non seulement d'une sphère creuse, mais aussi d'un plateau, plein ou annulaire, et d'un cylindre circulaire, plein ou creux, à la condition de prendre alors $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$, par exemple, comme polynomes P *distincts* de degré n. Elles s'appliquent aussi, et d'une manière directe, au calcul, par la méthode de Fourier, des coefficients affectant les divers polynomes P, dans le développement, en fonctions sphériques, d'une fonction arbitraire de point, donnée sur toute la surface d'une sphère décrite autour de l'origine comme centre. Cela résultait d'ailleurs de la note des pages 296 à 299.

Une fois démontrée la possibilité de réduire à une série de Laplace, ayant la

Digitized by Google

148. Rapide nivellement des températures dans chaque couche sphérique. — Mais je crois inutile d'insister plus longtemps, à cause de l'étendue que prendraient les calculs dans toute applica-

---

forme $\Sigma \mathcal{R} P$, l'état initial u_0 de chaque couche sphérique mince de rayon r, avec des coefficients $\mathcal{R}$ dès lors fonctions de r seul, il est facile de reconnaître que l'état initial d'une sphère pleine ou creuse est réductible lui-même à une série de la forme $\Sigma c \rho P$, où les expressions de ρ se calculeront toujours par l'équation différentielle (γ') et les deux conditions spéciales aux limites inférieure et supérieure de r (zéro et R par exemple). Il suffit de raisonner comme on l'a fait, (p. 285) pour l'état initial du parallélépipède.

La question étant, en effet, de décomposer tout coefficient $\mathcal{R}$ en termes de la forme $c\rho$, on regardera chaque fonction $\mathcal{R}$ de r comme exprimant la température initiale u_0, dans une sphère *diathermane* où u ne dépendrait que de la distance r au centre, et où le coefficient L de rayonnement de chaque couche aurait la valeur $K\frac{n(n+1)}{r^2}$, inverse du carré r^2 de son rayon. Alors l'équation indéfinie des températures serait (p. 292)

$$Cr^2\frac{du}{dt} = K\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) - Lr^2u = K\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) - n(n+1)u\right],$$

ou bien, divisée par Cr,

$$\frac{d.ru}{dt} = a^2\left[\frac{d^2.ru}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}ru\right];$$

et la substitution, à u, d'une solution simple $e^{-a^2\alpha^2 t}U$, donnerait, en rU, l'équation indéfinie

$$\frac{d^2.rU}{(d.\alpha r)^2} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{(\alpha r)^2}\right]rU = 0,$$

identique à (γ'). Comme les conditions définies, spéciales aux deux limites de r, seraient, évidemment, les mêmes aussi pour rU et pour $r\rho$, il y aurait identité absolue de U et de ρ. Par suite, la série ΣcU, développement, dans la sphère fictive considérée, de l'état initial $\mathcal{R}$, arbitraire en r, recevrait bien la forme voulue $\Sigma c\rho$; et la température initiale $u_0 = \Sigma \mathcal{R} P$ de la sphère proposée deviendrait $\Sigma(\Sigma c\rho)P$, c'est-à-dire, par une nouvelle décomposition, $\Sigma c\rho P$.

On pourrait, encore, soit regarder, dans les équations ci-dessus, ru comme la température, initialement égale à $r\mathcal{R}$, d'une barre cylindrique athermane, s'étendant (de $r = 0$ à $r = R$ par exemple) le long d'un axe d'abscisses r, et où la capacité calorifique et la conductibilité intérieure seraient constantes, mais la conductibilité extérieure inverse de r^2, soit, plus directement, en prenant l'équation en u sous sa première forme (où le produit ru ne figure pas), considérer u comme la température, initialement égale à $\mathcal{R}$, d'une pareille barre cylindrique athermane, où la conductibilité extérieure serait constante, mais la conductibilité intérieure et la capacité calorifique, proportionnelles à r^2.

Il suit de là, *a posteriori*, que le problème du refroidissement de la sphère n'admet pas d'autres solutions simples que les produits $c\rho P$, de même que celui du refroidissement du parallélépipède comportait uniquement, comme solutions simples, les divers termes du produit $\varphi(t, x)\,\varphi_1(t, y)\,\varphi_2(t, z)$.

Digitized by Google

tion de la solution à un problème concret. Le résultat le plus saisissable qu'on en ait déduit a été dégagé par Sturm (*Journal de Liouville*, t. I, p. 147; 1836) : il consiste en ce que *le nivellement relatif des températures se fait plus vite à l'intérieur de chaque couche sphérique qu'entre les couches et avec le dehors*. Or ce résultat se déduit de l'analyse élémentaire exposée dans la Leçon précédente, où l'hypothèse de températures u fonction seulement de r et t, c'est-à-dire l'emploi exclusif du facteur P_0, conduit à une première solution simple, *unique* pour son exponentielle en t, et *de même signe dans toute la sphère;* ce qui, vu d'ailleurs que les racines α changent avec n, astreint (p. 248) toute solution simple correspondant aux valeurs 1, 2, 3, ..., de n, à avoir des signes variés et, dès lors, à affecter des exponentielles e^{-mt} plus rapidement décroissantes que celle de la première solution (p. 255).

Il est, du reste, facile de voir directement que, à part P_0, les polynomes P changent de signe sur certains rayons de la sphère; car tous ont la valeur moyenne zéro sur une sphère quelconque décrite autour de l'origine.

On le reconnaîtrait, sans avoir d'ailleurs à former l'expression de P, en considérant, comme dans le numéro précédent, sur une figure σ de rayon r décrite autour de l'origine, la relation

$$\Delta_2 P = -\frac{n\nu}{r^2} P,$$

et en la multipliant ici, simplement, par l'élément $d\varpi$ ou $\varepsilon d\sigma$ de l'espace d'épaisseur ou de largeur ε qui entoure cette figure σ; puis en intégrant dans toute l'étendue ϖ de cet espace. Mais il suffit d'observer que le résultat à obtenir

$$\int_\sigma P\,d\sigma = 0 \text{ (pour } n > 0),$$

constitue le cas particulier le plus simple de la formule (δ'') établie ci-dessus

$$\int_\sigma PP'\,d\sigma = 0 \text{ (quand P et P' sont de degrés différents)},$$

savoir, le cas où l'on prend $P' = P_0 =$ constante, et, par suite, P

Digitized by Google

d'un degré autre que zéro. Donc, *à l'exception de* P_0, *tout polynome* P *a zéro comme moyenne de ses valeurs suivant les diverses directions*. C'était évident dans le plan, où nous savons que P égale soit $\cos n\theta$, soit $\sin n\theta$, avec l'azimut θ variable uniformément de zéro à 2π (1).

Il suit de là que les termes de u variables avec la direction sont *séparément* nuls *en moyenne* sur toute couche sphérique décrite autour du centre de la sphère donnée; et voilà pourquoi la partie en P_0 de u, composée des solutions simples ne dépendant que de r et t, exprime *à elle seule* les températures moyennes des couches (2).

---

(1) On peut en dire autant de toutes nos fonctions U variables, quand elles sont relatives à un corps athermane et de contexture symétrique, imperméable à la chaleur. Car, alors, L et k étant nuls dans les équations (216) à (218) (p. 243), l'uniformisation finale des températures est exprimée par les valeurs $m_0 = 0$, $U_0 =$ const., de la plus petite racine de l'équation caractéristique et de l'expression correspondante de U. D'ailleurs, à $m = 0$, il ne correspond pas d'autre expression de U que $U_0 =$ const.; car l'équation (220) (p. 244) implique, dès qu'on y pose $m = 0$ sans annuler identiquement U, non seulement les deux hypothèses déjà faites $L = 0$, $k = 0$, mais aussi la relation $\Phi = 0$ ou $U =$ const. Par suite, si, dans la première formule (222) (p. 246), l'on prend $m' = m_0 = 0$ et $U' = U_0 =$ const., il vient bien

$$\int_\varpi CU\, d\varpi = 0.$$

En d'autres termes, *toute fonction* U *variable, relative à un corps imperméable et athermane, s'annule en moyenne dans l'étendue du corps*. La raison physique de ce fait est que la solution simple correspondante, $u = ce^{-mt}U$, exprime les déplacements successifs dans le corps, sans accroissement ni diminution, d'une chaleur dont la valeur totale $\int_\varpi Cu\, d\varpi$ est nulle, comme donnant finalement, ou pour t infini, $u = 0$ partout.

(2) **Températures stationnaires de la sphère calculées par la même méthode.** — Si la sphère, soumise par rayonnement à des températures extérieures u_e données pour les divers points de sa surface, avait atteint un état permanent, ou que l'on eût l'équation indéfinie $\Delta_2 u = 0$ avec la condition à la surface

$$(\text{pour } r = R) \qquad \frac{du}{dr} + hu = hu_e,$$

on pourrait développer u_e en série de fonctions sphériques P, ou mettre cette température extérieure sous la forme ΣcP, et prendre alors pour u la série analogue de solutions simples (à mêmes coefficients c que u_e),

$$u = \Sigma cP\rho,$$

où les facteurs ρ seraient des fonctions convenablement choisies de r. Alors, en

Digitized by Google

149. Refroidissement du cylindre circulaire, d'une sphère creuse et d'un cylindre creux; retour sur l'armille. — Quand on étudie le refroidissement d'un mince plateau circulaire de rayon R à bases

---

effet, l'équation indéfinie $\Delta_2 u = 0$ deviendrait, pour chaque solution simple $cP\rho$, vu la formule (7),

$$\frac{d^2.r\rho}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2} r\rho = 0,$$

équation différentielle ayant l'intégrale générale, à deux constantes arbitraires A, B,

$$r\rho = Ar^{n+1} + Br^{-n} \quad \text{ou} \quad \rho = Ar^n + Br^{-n-1}.$$

Au centre, pour $r = 0$, le produit $r\rho$ doit s'annuler et non devenir infini; d'où il résulte $B = 0$. D'autre part, la condition à la surface, devenue, après suppression du facteur commun cP,

$$(\text{pour } r = R) \qquad \frac{d\rho}{dr} + h\rho = h,$$

donne

$$A = \frac{hR}{hR + n} \frac{1}{R^n},$$

et la série $u = \Sigma cP\rho$ se trouve entièrement déterminée.

Telle est la solution du problème donnée par Laplace. Mais nous verrons dans les XXVe et XXVIe Leçons (au Tome II), qu'il en existe une autre plus simple, sous la forme d'une intégrale définie, et à laquelle seule nous nous arrêterons. Poisson l'a, il est vrai, découverte en la déduisant de celle-ci $\Sigma cP\rho$: depuis, l'on a appris à l'obtenir par une voie plus naturelle, que nous suivrons.

La même forme d'intégrale, en une série $u = \Sigma cP\rho$, s'étend au cas d'une sphère creuse, où il y a une seconde condition définie à vérifier, telle que $-\frac{du}{dr} + h'u = 0$, relative à la surface sphérique intérieure, dont l'équation est de la forme $r =$ une constante R_0. Alors r n'a plus à décroître jusqu'à zéro dans le corps; et les deux arbitraires A, B sont disponibles pour satisfaire aux deux conditions concernant les limites $r = R_0$, $r = R$.

Elle s'étend aussi, évidemment, en prenant pour ΣcP une série de Fourier, c'est-à-dire en adoptant des polynomes P à deux cosinus directeurs seulement X et Y, à un disque circulaire de rayon R, annulaire ou plein, posé sur le plan des xy et qui aurait, d'une part, ses bases imperméables, d'autre part, son contour soumis par rayonnement à des températures extérieures données u_e. Alors l'équation indéfinie serait toujours $\Delta_2 u = 0$, mais à deux variables indépendantes x, y; et les conditions spéciales au contour auraient la forme

$$[\text{pour } r = \text{soit R, soit } R_0] \quad \pm\frac{du}{dr} + hu = hu_e$$

(sauf la seconde dans le cas $R_0 = 0$, où u devrait encore rester fini au centre $r = 0$). Je reviendrai, du reste, sur ce problème dans la note suivante.

Tant pour la sphère creuse que pour le disque évidé, on composerait, en général, la solution complète, de deux solutions partielles, dans chacune desquelles u_e serait pris nul sur une des deux parties, concave ou convexe, du contour, de manière à n'y avoir que la série $u_e = \Sigma cP$ relative à l'autre partie.

Digitized by Google

imperméables, posé, son centre à l'origine, sur le plan des xy, les polynomes P du plan (ou à deux cosinus directeurs X, Y) prennent le même rôle que ceux de l'espace à trois dimensions dans le cas de la sphère. La solution simple est encore de la forme $\rho P e^{-a^2\alpha^2 t}$, avec ρ, fonction de la distance $r = \sqrt{x^2+y^2}$ à l'axe, donné par l'intégrale J de Bessel [1],

$$(\varepsilon) \qquad \rho = (\alpha r)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\omega \cos(\alpha r \cos\omega)\, d\omega,$$

et avec α défini, grâce à la condition

$$\frac{d\rho}{dr} + h\rho = 0 \text{ (pour } r = R)$$

---

[1] En effet, la valeur de $\Delta_2(\rho P)$, calculée en ajoutant à l'expression de $\frac{d^2.\rho P}{dx^2}$ (p. 300), l'expression analogue de $\frac{d^2.\rho P}{dy^2}$, est

$$(\zeta) \qquad \left(\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\rho}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\rho\right) P;$$

et l'équation indéfinie $\Delta_2(\rho P) + \alpha^2 \rho P = 0$ devient

$$(\zeta') \qquad \frac{d^2\rho}{(d.\alpha r)^2} + \frac{1}{\alpha r}\frac{d\rho}{d.\alpha\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{(\alpha r)^2}\right)\rho = 0.$$

Son intégrale, spécifiée de manière à rester finie au centre $r = 0$, est bien dès lors (ε), d'après les formules (80) et (84) de la même Leçon XLIe d'*Analyse infinitésimale* citée plus haut (p. 301).

Si le plateau était supposé soumis par rayonnement, sur son contour, à l'influence de températures extérieures données u_e, qu'il eût ainsi atteint un état permanent, et qu'il s'agît de former des solutions simples $cP\rho$ du problème de ses températures stationnaires, comme on l'a fait pour la sphère dans la note précédente, l'équation indéfinie $\Delta_2(\rho P) = 0$ à vérifier serait, d'après la formule (ζ) ci-dessus,

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\rho}{dr} - \frac{n^2}{r^2}\rho = 0.$$

Il faudrait donc prendre

$$\rho = A r^n + B r^{-n},$$

c'est-à-dire $\rho = A r^n$ dans le cas du plateau non évidé, tout comme dans celui de la sphère pleine; et, la condition relative à la limite supérieure $r = R$ étant évidemment la même que pour la sphère, il viendrait encore

$$u = \sum cP \frac{hR}{hR + n}\left(\frac{r}{R}\right)^n,$$

si l'on donnait à l'expression des températures extérieures la forme $u_e = \Sigma c P$.

Digitized by Google

spéciale au contour du plateau, par l'équation transcendante

$$(\varepsilon') \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\omega\,[(hR+n)\cos(\alpha R\cos\omega)-\alpha R\cos\omega\sin(\alpha R\cos\omega)]\,d\omega = 0.$$

Enfin, si l'on remplace la plaque par un cylindre circulaire d'une hauteur quelconque H, ayant son axe suivant l'axe des z, la solution simple devient $\rho P Z e^{-a^2(\alpha^2+\beta^2)t}$, avec les mêmes valeurs de ρ, de P et de α que pour le plateau circulaire, et avec Z, fonction de la troisième coordonnée z, exprimé par $\cos(\beta z-\gamma)$, où β et γ se déterminent de manière à vérifier les deux conditions spéciales aux bases $z=0$, $z=H$, c'est-à-dire de manière à donner, par exemple,

$$-\frac{dZ}{dz}-hZ=0 \text{ (pour } z=0), \qquad \frac{dZ}{dz}+hZ=0 \text{ (pour } z=H).$$

Ici, l'équation transcendante définissant les valeurs,

$$m = a^2(\alpha^2+\beta^2),$$

du coefficient du temps dans l'exponentielle e^{-mt}, comprend une équation en β et toutes les équations en α qui correspondent à $n=0$, $n=1$, $n=2$, ... Les racines β, et les racines α du cas $n=0$, sont simples; mais les autres racines α sont doubles, puisque chacune d'elles donne les deux expressions distinctes $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ de P. Et comme chacune de celles-ci est de valeur moyenne nulle ou, par conséquent, de signes variés, la solution simple fondamentale s'obtient en associant la plus petite valeur de β à la plus petite racine simple α (¹).

(¹) La possibilité de mettre la température initiale u_0 sous la forme $\Sigma c P \rho Z$ se reconnaîtrait en procédant comme plus haut (p. 284 et 306) pour le parallélépipède et pour la sphère.

On considérerait d'abord le cas du mince plateau circulaire taillé dans le cylindre à une hauteur quelconque $z=$ const.; et, le découpant en anneaux élémentaires de rayons r et $r+dr$, on mettrait, dans chaque anneau, u_0 sous la forme $\Sigma \mathcal{R} P$, où $\mathcal{R}$ serait fonction, à cette hauteur z, de r seulement.

Alors, pour décomposer chaque coefficient $\mathcal{R}$ en parties $\mathfrak{Z}\rho$, où $\mathfrak{Z}$ serait indépendant de r, on observerait que les fonctions ρ, vérifiant l'équation indéfinie (ζ') de la note précédente, savoir

$$\frac{d^2\rho}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\rho}{dr}+\left(\alpha^2-\frac{n^2}{r^2}\right)\rho=0,$$

Digitized by Google

Le refroidissement d'une sphère creuse et d'un cylindre creux, à rayon intérieur R_0, se calculera comme celui d'une sphère et d'un cylindre pleins, à cela près que, l'expression de $r\rho$ ou de ρ, pouvant alors devenir analytiquement infinie au centre où le corps ne s'étendra pas, comprendra, outre les fonctions de Fourier ou de Bessel données plus haut, une autre intégrale particulière, qui devient infinie pour $r = 0$, affectée d'un coefficient dont on disposera, en même temps que de α, pour vérifier à la fois les deux conditions spéciales, respectivement, à la surface concave $r = R_0$ et à la surface convexe $r = R$. C'est ainsi que l'expression de Z, $\cos\gamma \cos\beta z + \sin\gamma \sin\beta z$, à deux coefficients ayant leur rapport, $\tang\gamma$, arbitraire en même temps que β, permet de satisfaire aux conditions concernant la face plane inférieure $z = 0$ et la face plane supérieure $z = H$.

---

sont identiques aux fonctions U des solutions simples $ce^{-a^2\alpha^2 t}U$, pour le même plateau, mais supposé *diathermane*, avec coefficient L de rayonnement égal à $K\frac{n^2}{r^2}$, et à température initiale, $\mathcal{R}$, fonction *seulement* de la distance r à l'axe. Car, pour un tel plateau à températures variables seulement avec r et t, les fonctions U rentrent encore dans le type ρP, mais avec P égal à P_0 ou 1, c'est-à-dire d'un degré n nul; de sorte que $\Delta_2 U$ ou $\Delta_2(\rho P)$ y est simplement, vu la formule (ζ) de la note précédente, $\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\rho}{dr}$. Ainsi, $\mathcal{R}$ prend bien la forme $\Sigma\mathfrak{z}\rho$, et, par suite, u_0 ou $\Sigma\mathcal{R}P$, la forme $\Sigma\mathfrak{z}P\rho$.

L'expression $\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\rho}{dr}$ revenant à $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\rho}{dr}\right)$, on pourrait encore regarder les solutions simples $\mathfrak{z}e^{-a^2\alpha^2 t}\rho$ comme relatives à une barre cylindrique athermane, s'étendant le long d'un axe d'abscisses r, et où la capacité calorifique et la conductibilité intérieure seraient proportionnelles à r, mais la conductibilité extérieure inverse de r.

Enfin, pour changer chaque coefficient $\mathfrak{z}$, où n'entre plus que l'ordonnée z, en une série $\Sigma c Z$, on se donnerait $\mathfrak{z}$ comme température initiale, dans le cylindre proposé, mais supposé avoir sa surface latérale imperméable à la chaleur et admettre, par suite, pour ses températures, l'équation indéfinie $\frac{du}{dt} = a^2\frac{d^2u}{dz^2}$. Alors les solutions simples des équations de son refroidissement seraient justement

$$cZe^{-a^2\beta^2 t};$$

et l'état initial y prendrait la forme $\mathfrak{z} = \Sigma c Z$. Il viendrait donc, en définitive,

$$u_0 = \Sigma c P \rho Z;$$

ce qui prouve encore que toutes les solutions simples possibles du problème ont bien la forme $P\rho Z e^{-a^2(\alpha^2+\beta^2)t}$, avec P, ρ, Z, α, β calculés comme on a dit.

Digitized by Google

L'armille circulaire à section carrée ou rectangle n'est qu'un cas extrême du cylindre creux, celui où, sur les trois coordonnées semi-polaires θ, r, z, deux, r et z, sont assez peu variables pour qu'on puisse faire $\rho =$ constante et $Z =$ constante. Le facteur P seul garde donc, dans chaque solution simple, sa double expression générale $\cos n\theta$, $\sin n\theta$. Et voilà pourquoi toutes les racines de l'équation en m sont alors doubles, sauf la première, qui correspond à $n = 0$.

150. Raison d'être des racines multiples trouvées dans les problèmes simples de refroidissement. — L'existence de racines multiples dans une équation étant un fait très peu probable *a priori,* des racines m doubles ou, en d'autres termes, deux systèmes de valeurs de U pour une même valeur de m, ne pourront guère se produire, d'une manière prévisible, que dans un corps superposable à lui-même par coïncidence (dans deux positions différentes) de parties distinctes, comme lorsqu'on le suppose ou de révolution, ou, du moins, pourvu d'un axe principal de symétrie, ou enfin l'équivalent d'un tel corps quant aux équations de son refroidissement : telle est, par exemple, à l'appui de ce dernier cas, une armille homogène et de section constante, comparée à une armille circulaire. Il est clair qu'alors chaque fonction de point U se présente au moins deux fois, savoir, une fois dans chaque manière d'amener le corps en coïncidence avec lui-même; et qu'elle en donne ainsi deux distinctes dans le corps, sauf quand la seconde répartition de ses valeurs ne fait que reproduire la première en chaque point de l'espace (comme il arrive, dans le cylindre et la sphère, aux fonctions U dépendant seulement de la distance r à l'axe ou au centre).

De même, des racines triples ne pourront guère se produire simplement que s'il y a trois manières distinctes de faire coïncider le corps avec lui-même et d'y placer, par suite, les fonctions U, sans retomber néanmoins, pour chaque point (x, y, z) de l'espace, sur une précédente valeur.

Dans le cas de la sphère, où tout diamètre est un axe de révolution, on conçoit la possibilité de racines d'un degré de multiplicité quelconque. Et il en serait de même dans le cylindre, auquel son axe

Digitized by Google

unique permet une *infinité* de modes de coïncidence, si tout polynome P de degré n figurant dans l'étude de ce corps (c'est-à-dire à deux cosinus directeurs X et Y), et dont on *situe* autrement les valeurs dans le corps en en faisant tourner tout le système d'un angle quelconque autour de l'axe, ne gardait pas toujours la forme $\cos(n\theta + \text{const.})$ et par suite, ne restait pas réductible à deux polynomes seulement, $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$; d'où résultent *deux* formes distinctes de U et rien que deux, dans chaque degré n (supérieur à zéro).

La même raison montre pourquoi, dans la sphère, les racines m correspondant à des polynomes P de degré n sont, non d'une multiplicité infinie, mais seulement d'un ordre de multiplicité $2n+1$ égal au nombre des polynomes P de ce degré, qui sont distincts, ou à des combinaisons linéaires desquels tous les autres se réduisent.

Digitized by Google

VINGTIÈME LEÇON.

APERÇUS SUR LE PROBLÈME DU REFROIDISSEMENT DES CORPS A CONTEXTURE NON SYMÉTRIQUE; APPLICATIONS ET ANALOGIES DIVERSES.

151. Aperçus sur le problème du refroidissement, dans le cas d'un système à contexture non symétrique. — Le problème du refroidissement, dans le cas d'un système à contexture non symétrique, n'a pas encore été étudié, du moins à ma connaissance; et j'en dirai très peu de chose. La relation (200) (p. 238) y faisant défaut, sauf dans des circonstances exceptionnelles, nos raisonnements pour prouver que les solutions simples y ont toutes la forme $e^{-mt}U$, sans mélange de facteurs trigonométriques ni algébriques en t, ne s'appliquent généralement plus. Il faudrait peut-être une étude approfondie de la forme précise des équations différentielles (190) déduites du système aux dérivées partielles (187) à (189) (p. 229), pour justifier cette présence exclusive du temps t dans des exponentielles réelles, suggérée par l'observation. Si, en attendant, l'on y admet, à titre de donnée expérimentale, cette forme $e^{-mt}U$ des solutions simples, les formules du n° 125 (p. 243), subsisteront, et la relation (219) (p. 244), où l'on prendra V égal au facteur U' d'une autre solution simple $e^{-m't}U'$, aura évidemment son second membre non symétrique en U et U', à moins toutefois que l'égalité (200), alors inadmissible en chaque point (x, y, z), ne reste cependant exacte *en moyenne* pour toute l'étendue ϖ du système. Or on ne voit pas de raison pour qu'il en soit toujours ainsi; et il y a, dès lors, lieu de penser que les deux

Digitized by Google

expressions $m\int_\varpi CUU'd\varpi$, $m'\int_\varpi CU'U\,d\varpi$ sont généralement inégales.

La valeur moyenne du produit UU' n'étant plus nulle, le procédé d'élimination de Fourier cesse de réussir; et l'on doit se contenter d'appliquer la méthode des moindres carrés, de Legendre ou de Gauss, à la détermination des coefficients c de la série $\sum cU$, d'après l'état initial donné $u_0 = f(x, y, z)$. Comme, en prenant toutes les solutions simples dans la somme $\sum ce^{-mt}U$, l'on doit avoir partout

$$u_0 - \sum cU = 0,$$

l'intégrale *essentiellement positive* $\int_\varpi C\left(u_0 - \sum cU\right)^2 d\varpi$, expression (à un facteur constant près) du carré *moyen* de l'*écart* $u_0 - \sum cU$ dans tout le système, comporte alors un minimum nul, réalisé précisément par les valeurs cherchées des inconnues c. Dès lors, si l'on arrête la série convergente $\sum cU$ après son $n+1^{\text{ième}}$ terme $c_n U_n$ (n étant assez grand), ou que l'écart $u_0 - \sum cU$ soit seulement très petit et non plus nul, toujours avec les valeurs cherchées des coefficients c, l'intégrale $\int_\varpi C\left(u_0 - \sum cU\right)^2 d\varpi$, très peu supérieure à zéro pour ces vraies valeurs des inconnues $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$, sera, par le fait même, fort voisine du minimum positif qu'elle continue évidemment à admettre. Et les valeurs cherchées de c_0, c_1, c_2, ... différeront peu de celles qui la rendraient minimum ou qui donneraient, en la différentiant par rapport à l'une quelconque, c', de ces $n+1$ inconnues,

$$(259)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dc'}\displaystyle\int_\varpi C\left(u_0 - \sum cU\right)^2 d\varpi = 0, \\ \text{c'est-à-dire} \\ \displaystyle\int_\varpi C\left(-u_0 + \sum cU\right)U'\,d\varpi = 0. \end{array}\right.$$

Il vient ainsi, en $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$, les $n+1$ équations du pre-

Digitized by Google

mier degré comprises dans la formule

$$(260)\quad c_0\int_\varpi CU_0U'd\varpi + c_1\int_\varpi CU_1U'd\varpi + \ldots + c_n\int_\varpi CU_nU'd\varpi = \int_\varpi Cu_0U'd\varpi,$$

où U' est successivement $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n$.

Quand le produit moyen de deux solutions simples quelconques est nul, le premier membre se réduit au terme où $U = U'$; et l'on retombe sur le procédé de Fourier. Donc, alors, les valeurs des coefficients c sont indépendantes du nombre n des termes pris dans la série; et l'on a, du premier coup, les vrais coefficients, que donnerait l'hypothèse $n = \infty$. Dans le cas contraire, les coefficients obtenus tendent seulement, à mesure que n grandit, vers les vrais. Mais ils sont au moins aussi avantageux que ceux-ci pour le calcul approché de *u par les $n+1$ premiers termes de la série* $\sum ce^{-mt}U$, puisqu'ils font *reproduire le mieux possible l'état initial* par la somme des $n+1$ premiers termes en question. Cette somme, en effet, vérifiant d'ailleurs toutes les autres conditions du problème, constituerait la solution exacte, pour l'état initial auquel elle se réduit à l'époque $t = 0$ et qui est, par hypothèse, presque identique à l'état initial vrai ou donné.

152. De quelques cas où la solution s'obtient en opérant comme si la contexture était symétrique. — Signalons quelques cas où la solution s'obtient en opérant comme si la contexture était symétrique.

Le plus simple est celui où la température u et, par suite, toutes les fonctions employées $U, V, U', \ldots$, ne dépendent que d'une seule des coordonnées x, y, z, de x par exemple. C'est ce qui arrive pour un mur à faces parallèles aux yz, indéfini en longueur et hauteur ou profondeur, rayonnant par ses deux faces vers des atmosphères à la température zéro et de la même manière sur toute l'étendue de chacune d'elles, enfin, composé de couches homogènes, à capacité et conductibilités variables avec x, et chauffées, initialement, aussi de même sur toute l'étendue de chacune. Alors la différence (201) des deux membres de la formule (200) (p. 238) est identiquement nulle; et la relation (200), base de la théorie pour

Digitized by Google

les corps à contexture symétrique, continue à subsister même pour ceux qui ne le sont pas.

Dans d'autres cas, la différence (201), où l'on devra mettre U pour u et V, U′, etc., pour v, s'annule non en chaque point, mais seulement en moyenne dans le volume ϖ du système ; ce qui suffit évidemment à l'extension cherchée de la théorie ; car les deux membres de (200), après les substitutions dites de U à u et de V, U′, ... à v, ne figurent, dans les relations qu'elle emploie, que multipliés par $d\varpi$ et intégrés. Il suffit donc, sauf toujours les substitutions dites de U à u et de V, U′, ... à v, d'avoir alors, du moins s'il s'agit d'un milieu homogène où $\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_1$, ont même valeur dans tout le volume,

$$(261)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_\varpi \left(\frac{du}{dy}\frac{dv}{dz}-\frac{du}{dz}\frac{dv}{dy}\right)d\varpi = 0,\\ &\int_\varpi \left(\frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dx}\frac{dv}{dz}\right)d\varpi = 0,\\ &\int_\varpi \left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right)d\varpi = 0.\end{aligned}\right.$$

Or, dans la première, par exemple, de ces égalités, l'expression sous le signe $\int$ est identiquement $\frac{d}{dz}\left(v\frac{du}{dy}\right)-\frac{d}{dy}\left(v\frac{du}{dz}\right)$; et la réduction usuelle, dès lors possible, des intégrales de volume à des intégrales de surface, la transforme en celle-ci,

$$(262)\qquad \int_\sigma v\left(\frac{du}{dy}\cos\gamma-\frac{du}{dz}\cos\beta\right)d\sigma,$$

où l'intégrale est prise sur toute l'étendue de la surface limite σ seulement (le système, homogène par hypothèse, se réduisant à un corps unique). Or cette intégrale (262) s'annule, élément par élément, si l'on suppose $u=$ const. sur chaque nappe distincte de la surface σ ; car alors il y a proportionnalité des dérivées partielles de u, U, V, ... aux cosinus directeurs de la normale.

Donc, quand la température u et, par suite, les fonctions U, V, ... doivent être constantes sur chaque nappe de la surface, la théorie donnée pour une contexture symétrique s'applique à un corps homogène quelconque. C'est ce qui arrivera dans le refroidissement par contact, où l'on aura $u=0$ à la surface σ, et aussi dans le refroidissement d'une partie restreinte, initialement chauffée,

Digitized by Google

d'un corps assez grand pour que ses régions très éloignées de cette partie, et notamment la surface σ, puissent être supposées sans cesse à la température zéro.

Plus généralement, si u, v, ou plutôt U, V, U', ..., sans être constants sur chaque nappe de la surface limite, sont, *dans toute l'étendue de cette surface,* variables de telle manière, que, sur les lignes où l'une de ces fonctions, U, par exemple, garde ou reprend une quelconque de ses valeurs, les autres gardent ou reprennent aussi la leur, l'intégrale (262) et les deux autres analogues seront encore nulles; et la théorie du refroidissement des systèmes à contexture symétrique s'appliquera. Alors, en effet, dans (262), v sera, par hypothèse, sur toute la surface σ, une certaine fonction φ' de u, fonction que nous supposerons graduellement variable avec u; et, $\varphi(u)$ désignant $\int \varphi'(u)\,du$, l'expression (262) pourra s'écrire

$$\int_\sigma \left[\frac{d\varphi(u)}{dy}\cos\gamma - \frac{d\varphi(u)}{dz}\cos\beta\right] d\sigma.$$

Or les deux intégrales de surface dont cette expression est la différence, équivalent évidemment aux deux intégrales de volume $\int_\varpi \frac{d^2\varphi}{dz\,dy}\,d\varpi$ et $\int_\varpi \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\,d\varpi$, visiblement égales. Ainsi l'expression (262) est bien nulle; et l'on peut en dire autant des deux autres analogues, transformées des premiers membres de la seconde et de la troisième relation (261). Donc la théorie du refroidissement des corps à contexture symétrique s'applique au cas actuellement considéré, qui est celui où les lignes isothermes, sur la surface limite d'un corps homogène à contexture non symétrique, seraient connues à l'avance, et, par suite, les mêmes dans toutes les solutions simples.

153. Sur d'autres questions, non traitées ici. — Pour ne pas grossir outre mesure mes deux Volumes, je supprimerai, à cet endroit, plusieurs de mes Leçons orales sur la théorie analytique de la chaleur, savoir, celles qui n'ont guère été que la reproduction d'exemples très connus. Le lecteur trouvera la plupart de ces exemples, avec plusieurs autres non moins intéressants, dans les Leçons, consacrées à la Physique mathématique, de mon *Cours*

Digitized by Google

d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique (t. II, *Compléments*). Il pourra y lire, pour ceux qui concernent le refroidissement de corps athermanes, homogènes et isotropes, de dimensions finies, la seconde partie de la XLIVe Leçon (p. 392* à 400*), et, pour la dissémination de la chaleur dans un milieu homogène et isotrope indéfini, ou encore pour l'échauffement d'un tel milieu à partir d'un centre ou d'un axe, de grands fragments de la XLVIIe Leçon (p. 457* à 484*) et de la XLIXe Leçon (p. 517* et 532*). J'aborderai, du reste, plusieurs de ces questions dans le Tome suivant.

Quant au second problème général de la théorie analytique de la chaleur, savoir, celui des températures stationnaires, il y en a un cas remarquable, relatif au prisme athermane, homogène et isotrope, chauffé par ses bases et refroidi par sa surface latérale, que Fourier a, très ingénieusement, ramené à un problème de refroidissement, concernant une plaque à bases imperméables et de même forme que la base du prisme [1]. Je l'ai

---

[1] Voici comment il opère (*Théorie analytique de la chaleur*, Chap. III et VII), dans le cas, auquel il se borne, d'un prisme infiniment long, avec température zéro tant à l'infini qu'autour de la surface latérale. Il remplace, dans la formule $u = \Sigma c e^{-mt} U$ du refroidissement de la plaque, chaque exponentielle e^{-mt} par une fonction Z de la nouvelle coordonnée z, dirigée suivant la hauteur du prisme qui a la plaque comme base; et il détermine d'ailleurs Z, par l'équation indéfinie $\Delta_2 u = 0$ avec conditions relatives aux deux limites $z = 0$, $z = \infty$, de manière que la fonction donnée u ou $u_0 = f(x, y)$, caractéristique du mode d'échauffement permanent de la base $z = 0$, soit exprimée par la même série $\Sigma c U$ que l'était l'état initial u_0 de la plaque se refroidissant par son contour.

Les solutions simples du problème du refroidissement de la plaque lui en donnent donc d'analogues dans celui des températures stationnaires du prisme, avec substitution de la nouvelle coordonnée z au temps t. C'est ainsi que les solutions simples, $c P e^{-n\sqrt{\frac{a^2 t}{R^2}}}$, des équations du refroidissement d'une enveloppe sphérique ou d'un anneau circulaire de rayon R, nous ont conduit plus haut, dans les notes des pages 309 et 310, par la substitution des fonctions $A r^n$ de la nouvelle coordonnée r aux exponentielles $e^{-n\sqrt{\frac{a^2 t}{R^2}}}$, aux solutions simples du problème des températures stationnaires de la sphère remplissant l'enveloppe en question ou du plateau ceint par l'anneau considéré.

Dans le prisme de longueur infinie suivant les z positifs, chauffé par sa base $z = 0$, la substitution de z à t ou, plus précisément, d'un facteur de la forme $\lambda e^{-\alpha z}$ à l'exponentielle $e^{-a^2\alpha^2 t}$, entraîne, comme le remarque Fourier, une régularisation, par la distance z, des valeurs de u fonctions de x et y, analogue à celle de l'*état pénultième*, ou qui se produit par le temps t dans la plaque en train de se refroidir.

Digitized by Google

exposé, avec d'autres assez nombreux qui s'y réduisent, et avec quelques-uns, relatifs également à des corps de dimensions finies, qui n'en dépendent pas, dans la XLVe Leçon (p. 402* à 426*).

D'autres cas importants de températures stationnaires, concernant surtout des corps de grandes dimensions avec sources intérieures ou superficielles locales, se traitent par les potentiels inverses, qui permettent en général, quand le corps est homogène, isotrope et athermane, d'éliminer du problème les sources intérieures, par la formation, comme solution particulière de l'équation indéfinie, du potentiel d'une masse dont la densité serait partout proportionnelle au débit S des sources données [1]. L'excédent de u sur ce potentiel est évidemment une fonction régie par l'équation indéfinie débarrassée du terme en S, et par des relations à la surface transformées de celles qu'on donne, mais pouvant, il est vrai, devenir ainsi plus compliquées : le problème est donc ramené à un autre où l'échauffement ne se fait que par la surface. On trouvera les exemples les plus intéressants de ces sortes de solutions dans la XLVIe Leçon du même Cours (p. 429* et 443*), dans la XLIXe (p. 530*), enfin, dans les XXIVe, XXVe et XXVIe des Leçons ci-après, au Tome II.

154. Nombreuses analogies de ces questions avec d'autres, étrangères à la théorie de la chaleur. — Il est d'autant plus naturel d'adjoindre au *Cours d'Analyse* la plupart de ces questions, que leur utilité se montre surtout dans une foule de problèmes appartenant, il est vrai, à la Physique mathématique, mais étrangers à la théorie analytique de la chaleur et, souvent, présentant un plus haut intérêt pratique, ou comportant une vérification expérimentale plus aisée, que les problèmes de cette théorie à l'occasion desquels elles se sont offertes en premier lieu aux géomètres.

---

[1] En effet, si, K étant la conductibilité intérieure du corps proposé, on attribue à la masse fictive dont il s'agit ici la densité $\frac{S}{4\pi K}$, la formule de Poisson, relative au paramètre différentiel Δ_2 de son potentiel inverse U, donnera $\Delta_2 U = -\frac{S}{K}$, ou $K\Delta_2 U + S = 0$; ce qui est bien l'équation indéfinie, aux dérivées partielles, de la température, supposée permanente.

Digitized by Google

C'est ainsi que les formules de la dissémination de la chaleur à partir d'un centre, d'un axe, ou d'un plan, et de l'échauffement d'une barre, dont il vient d'être parlé, régissent, par exemple, la *diffusion* d'un sel soluble dans un liquide (1), phénomène qui est, par excellence, le type matériel ou l'image du mouvement de la chaleur dans les corps, au point qu'il pourrait même lui être identique ou en fournir la théorie vraie, si le calorique était une substance *spéciale* et non de l'énergie. Aussi reviendrons-nous, tout à l'heure, sur ce sujet.

Les mêmes formules régissent encore les glissements bien continus et les frottements des fluides contre les parois qu'ils mouillent (2), la résistance d'un liquide imparfait aux petits mouvements relatifs d'une sphère ou d'un cylindre immergés (3), même l'établissement du régime uniforme à l'entrée d'un tube circulaire (4), etc.

Quant aux équations des températures stationnaires, elles s'appliquent, par exemple, au calcul de la résistance qu'éprouvent des solides à se mouvoir dans un liquide parfait (5), aux problèmes de l'écoulement par les orifices, du régime uniforme des fluides dans les tubes à section de forme quelconque, de la torsion des prismes (6), etc.

---

(1) *Voir* à ce sujet, dans mon Volume intitulé *Application des potentiels, etc.*, les notes des pages 404 et 406.

(2) *Voir*, par exemple, au *Journal de Physique théorique et appliquée* (2e série, t. X; juillet 1891), les nos VII à IX de mon Mémoire *Sur les déformations et l'extinction des ondes aériennes propagées dans un tuyau de conduite.* Un complément de ce Mémoire a paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (3 juillet 1893, t. CXVII, p. 12).

(3) Cette question est traitée plus loin, dans la Note I du second Volume; c'est aux nos **16** à **21** qu'y apparaissent les analogies signalées ici.

(4) *Voir*, par exemple, mon second Mémoire (*Régimes variés*, 1897) *Sur la Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section*, p. 66 à 68.

Ce second Mémoire contient (p. 72) une *Addition* où une même analyse embrasse les deux cas des écoulements tourbillonnants et des écoulements bien continus. En y joignant un premier Mémoire sur la même *Théorie de l'écoulement tourbillonnant*, etc., relatif surtout au *Régime uniforme*, on peut se rendre compte, en particulier, des lois régissant l'écoulement dans les tubes fins, utilisées ci-après pour l'explication hypothétique qu'on pourrait demander, des phénomènes de chaleur, à leur analogie avec ceux de filtration, si le calorique était de la matière.

(5) Note I, à la fin du Volume suivant, nos 4 à 12.

(6) *Voir*, par exemple, dans le Volume cité de *Compléments* au *Calcul intégral*, les nos **452*** (p. 429*) et **450*** (p. 419*).

Digitized by Google

155. Analogie des phénomènes de propagation de la chaleur avec ceux de filtration des fluides. — Parmi ces nombreuses applications que comportent ainsi les équations de la propagation de la chaleur à des phénomènes d'une autre nature, il y a lieu d'insister ici, comme nous avons dit, sur celles qui concernent la diffusion des solutions dans leurs dissolvants, et même, plus généralement, la filtration des fluides dans un milieu à pores sensibles, comme une masse sablonneuse; car nous verrons que la diffusion paraît être un cas particulier de la filtration. Ces phénomènes sont régis par une équation indéfinie, aux dérivées partielles, et des conditions définies, extrêmement analogues à celles de la propagation de la chaleur dans les solides athermanes, du moins tant qu'il ne s'agit que des cas simples d'échauffement ou de refroidissement par contact, avec surface limite pouvant être imperméable sur une partie plus ou moins grande de son étendue.

Pour les liquides filtrants, les équations des états même non permanents ont la forme de celles des températures stationnaires, l'équation indéfinie étant, par exemple, $\Delta_2 u = 0$ dans un milieu poreux homogène et isotrope. La *hauteur de charge* en chaque point (x, y, z) et à chaque instant t, composée en partie de l'*altitude* de ce point et en partie de la hauteur de fluide représentative de la *pression*, y joue le rôle de la température u; et le volume liquide filtré à travers chaque *élément plan* de la masse sablonneuse y représente le flux de chaleur correspondant.

Il en est de même, quoique seulement à l'état *permanent*, quand il s'agit de gaz ordinaires, à coefficient de frottement intérieur sensiblement indépendant de la densité, et d'une pression d'ailleurs proportionnelle à celle-ci (vu la persistance d'une même température, maintenue, malgré la détente du fluide, par le contact du milieu poreux). Alors c'est le carré de la densité qui a le rôle dévolu à la température u dans les questions de propagation de la chaleur; et la *masse* gazeuse que débite chaque élément plan remplace le flux calorifique. A l'état non permanent, l'équation indéfinie de la filtration devient beaucoup plus compliquée, sauf lors de faibles variations relatives de la densité (permettant de remplacer un coefficient variable par une valeur moyenne constante): en effet, cette équation, où u désigne encore le carré de la densité,

Digitized by Google

prend la forme

$$\frac{d\sqrt{u}}{dt} = a^2 \Delta_2 u \qquad \text{ou} \qquad \frac{du}{dt} = 2a^2\sqrt{u}\,\Delta_2 u.$$

Mais lorsque, la loi de Mariotte s'appliquant encore, le coefficient de frottement intérieur est supposé proportionnel à la densité, on obtient une analogie complète, tant pour un état non permanent que pour un état permanent, entre les phénomènes de filtration et ceux de communication de la chaleur dans les solides athermanes, la température devenant la *densité* du fluide expansif ainsi constitué, et les flux de chaleur, à travers les divers éléments plans, devenant les masses fluides débitées par ces éléments dans l'unité de temps.

156. Théorie du calorique qui résulterait de cette analogie, si la chaleur était un fluide; et, d'abord, recherche de la formule des flux de chaleur. — Si donc la théorie *matérielle* de la chaleur n'avait pas été renversée par la Thermodynamique, c'est à un pareil fluide expansif, filtrant dans les corps comme l'air filtre dans du sable, qu'il aurait fallu, ce semble, assimiler la substance qualifiée de *chaleur*, pour établir la *dynamique* de ses mouvements dans les solides et les liquides.

Alors la capacité C d'un corps pour la chaleur aurait été, *du moins dans un premier aperçu* (¹), le rapport, au volume apparent total, de l'espace *interstitiel* laissé libre entre ses molécules pour donner place à la chaleur, ou la capacité, par unité de volume, des pores accessibles au *calorique*. Quant à la conductibilité, elle aurait dépendu de la forme, du calibre et du nombre (suivant chaque sens) des *tubes de transpiration*, constitués par les pores contigus, assez bien alignés sur de petites longueurs pour permettre un écoulement appréciable. Mais développons quelque peu ce point, puisqu'il se rattache d'une certaine manière à notre sujet, qui est l'explication des phénomènes calorifiques.

(¹) On verra ci-après (n° 159) que la forte attraction du calorique par la matière de chaque corps, et l'énorme condensation qui en résulterait pour ce fluide dans le corps, entraîneraient l'introduction d'un facteur de plus dans cette définition simple de C.

Digitized by Google

Dans un filtre sablonneux, par exemple, et contenant de l'air ou de l'eau, les parois des tubes dont il s'agit se composent, en partie, de grains de sable et, en partie, du fluide, à peu près immobile, remplissant ceux de leurs interstices aux issues desquels il se trouve éprouver une même pression. Ces petites parties fluides des parois rendent ainsi solidaires, au point de vue de la pression, les tubes voisins qu'elles séparent; car, en vertu de la loi hydrostatique, elles transmettent intégralement de l'un à l'autre la hauteur de charge, qu'une autre loi bien connue rend déjà constante dans chaque section normale d'un tube, traversée perpendiculairement et, à des écarts près de sens variés, en droite ligne, par les filets fluides. On conçoit dès lors qu'à toute époque donnée t, les surfaces d'égale charge, censées suivies à travers le fin réseau fluide du milieu poreux, présentent d'innombrables irrégularités locales, ou soient comme hachées d'imperceptibles encoches, dont une à chaque bouche de tube; mais qu'elles restent cependant continues dans l'ensemble, comme le sont, pour les eaux souterraines (en mouvement) du filtre que forme un sol perméable, les dénivellations de la surface supérieure dues à l'irrégularité des pluies, ou à la pente du fond imperméable, etc.

Pour notre fluide expansif sans pesanteur, les surfaces d'égale charge seront celles d'égale pression p, ou d'égale densité u; et, abstraction faite de petites inégalités de sens divers, les quantités p ou u, d'ailleurs proportionnelles l'une à l'autre, seront, aux divers endroits (x, y, z) du milieu poreux, une fonction graduelle de leurs coordonnées x, y, z par rapport à un système d'axes rectangulaires fixes. Un quelconque des petits tubes de transpiration avoisinant (x, y, z), de section σ, de longueur ds, et suivant l'axe duquel p grandira de $\frac{dp}{ds} ds$, débitera en sens contraire de cet axe ds, par unité de temps, un volume fluide donné par les lois de régime uniforme (ou quasi-uniforme) de Hagen et Poiseuille, généralement justifiées pour des tubes aussi fins, où les inerties du fluide restent négligeables [1]. Ce volume aura dès lors l'expression

$$k \frac{\sigma^2}{\varepsilon} \frac{dp}{ds},$$

[1] Cependant, à raison de l'extrême irrégularité des tubes dont il s'agit ici

Digitized by Google

où ε désigne le coefficient de frottement intérieur du fluide, et, k, un simple nombre, dépendant de la forme de la section σ (comme, par exemple, $\frac{1}{8\pi}$ pour une section circulaire, $\frac{1}{20\sqrt{3}}$ pour une section triangulaire équilatérale, environ $\frac{7}{200}$ pour une section carrée, etc.). La *masse* q débitée par le tube, toujours dans le sens contraire à celui de ds, est donc

$$q = k\frac{\sigma^2 u}{\varepsilon}\frac{dp}{ds},$$

ou bien (vu la double proportionnalité, à u, de p et de ε, qui, en posant

$$\frac{p}{\varepsilon} = \text{une constante } h,$$

donne $u\frac{dp}{ds}$ égal à $p\frac{du}{ds}$ et $\frac{u}{\varepsilon}\frac{dp}{ds}$ égal à $h\frac{du}{ds}$),

$$q = kh\sigma^2\frac{du}{ds}.$$

Or, si l'on appelle λ, μ, ν les trois cosinus directeurs de l'axe ds du tube, la dérivée $\frac{du}{ds}$ se décomposera, comme on sait, en

$$\frac{du}{dx}\lambda + \frac{du}{dy}\mu + \frac{du}{dz}\nu;$$

et l'on aura

$$q = (kh\sigma^2\lambda)\frac{du}{dx} + (kh\sigma^2\mu)\frac{du}{dy} + (kh\sigma^2\nu)\frac{du}{dz}.$$

---

et des changements relativement rapides en résultant pour les petites vitesses qu'y prend le fluide, les termes où figurent les inerties, dans les équations du mouvement, peuvent bien être, en chaque point, du même ordre que les autres, dus soit aux frottements, soit aux variations de la pression. Mais ils ont leurs valeurs moyennes nulles dans toute petite étendue sensible, comme les accélérations mêmes, de sens divers : ce qui, on le conçoit, doit réduire à zéro leur effet *général* tant sur le débit des éléments plans, que sur les variations, entre régions voisines, de la pression et de la hauteur de charge.

Il doit en être de même pour les termes compliqués, mais de signes également divers, exprimant les parties des frottements dues aux irrégularités locales des vitesses, c'est-à-dire aux différences, nulles en moyenne, des vitesses vraies, d'avec leurs valeurs correspondant à un régime uniforme sur la section que l'on considère et dans le voisinage.

Digitized by Google

157. Établissement de cette formule générale des flux de chaleur. — Cela posé, décrivons, autour du point (x, y, z) comme centre, une sphère d'aire 1, ou de rayon $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$; et soit ω une aire quelconque, très petite en tous sens, idéalement découpée sur cette sphère. Groupons ensemble, parmi les tubes de transpiration qui avoisinent le point (x, y, z), tous ceux dont l'axe ds, si on le transportait au centre parallèlement à lui-même, aboutirait, en direction, à la petite aire ω ainsi définie; et soient justement, dans la formule précédente, λ, μ, ν, les trois cosinus directeurs des axes de tout ce groupe de tubes.

D'autre part, menons par (x, y, z) un petit plan quelconque (*élément plan* du milieu poreux), défini en direction par les trois angles α, β, γ de sa normale avec les x, y, z positifs. Il y aura, évidemment, d'autant plus de tubes du groupe coupés par l'unité d'aire de ce plan, que celle-ci aura sa projection plus grande sur un plan perpendiculaire à tous leurs axes, plan où leurs sections normales se trouveront distribuées d'une certaine manière, dépendant de la constitution du milieu poreux, et généralement variable avec la direction (λ, μ, ν). Si donc on appelle $2i$ un certain coefficient, uniquement fonction, pour un même milieu, de λ, μ, ν, le nombre des tubes du groupe qui auront forme et grandeur données, de chaque espèce existant dans le milieu, et que coupera l'unité d'aire de la projection considérée du petit plan, pourra être exprimée par $2i\omega$. Or il suit de là que ce nombre sera $2i\omega \cos V$ pour l'unité d'aire même de l'élément plan donné, V désignant le cosinus de l'angle que fait la normale à l'élément avec la direction (λ, μ, ν) du groupe.

Pour obtenir le flux F à travers l'unité d'aire de notre élément plan, nous n'aurons, après avoir remplacé $\cos V$ par son expression $\lambda \cos\alpha + \mu \cos\beta + \nu \cos\gamma$, qu'à faire la somme, d'abord, des masses fluides q débitées par les tubes du groupe traversant l'élément et qui ont formes ou calibres divers, et, ensuite, de toutes les sommes analogues pour les groupes qui correspondent aux éléments ω d'une demi-sphère, ayant son pôle sur la normale à l'élément plan. Cette dernière sommation pourra, d'ailleurs, être étendue à la sphère entière, à la condition de remplacer $2i$ par i; car chaque tube appartiendra également aux groupes de deux

Digitized by Google

éléments ω, symétriques par rapport au centre de la sphère, et fournira même apport dans les deux groupes. Indiquons alors par le signe $\sum$ les sommations, ainsi étendues tant à toutes les natures de tubes qu'à toute la sphère; enfin, posons, pour abréger,

$$\mathcal{A} = \sum ikh\sigma^2\lambda^2\omega, \qquad \mathcal{B} = \sum ikh\sigma^2\mu^2\omega, \qquad \mathcal{C} = \sum ikh\sigma^2\nu^2\omega,$$

$$\mathcal{D} = \sum ikh\sigma^2\mu\nu\omega, \qquad \mathcal{E} = \sum ikh\sigma^2\nu\lambda\omega, \qquad \mathcal{F} = \sum ikh\sigma^2\lambda\mu\omega,$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont des sommes essentiellement positives, comme les carrés λ^2, μ^2, ν^2, et $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des sommes de signes divers, comme les produits $\mu\nu$, $\nu\lambda$, $\lambda\mu$. Il viendra, pour la valeur totale, F, des produits $qi\omega\cos V$,

$$\begin{aligned} F = & \left(\mathcal{A}\frac{du}{dx} + \mathcal{F}\frac{du}{dy} + \mathcal{E}\frac{du}{dz}\right)\cos\alpha \\ & + \left(\mathcal{F}\frac{du}{dx} + \mathcal{B}\frac{du}{dy} + \mathcal{D}\frac{du}{dz}\right)\cos\beta + \left(\mathcal{E}\frac{du}{dx} + \mathcal{D}\frac{du}{dy} + \mathcal{C}\frac{du}{dz}\right)\cos\gamma. \end{aligned}$$

On voit que cette expression équivaut à l'ensemble des formules (47) (p. 126) et (27) (p. 110), impliquant toute la théorie de la conductibilité dans les corps à contexture symétrique.

158. Équations indéfinie et définies, aux dérivées partielles, de la température; difficultés de cet essai de théorie. — Il est inutile d'ajouter que l'équation indéfinie se formera en égalant l'accroissement par unité de temps, $C\frac{du}{dt}d\varpi$, de la masse fluide $Cu\,d\varpi$ contenue, à l'époque t, dans le volume apparent $d\varpi$ d'une particule du milieu poreux, à la somme algébrique

$$\left(\frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}\right)d\varpi$$

des flux entrés par toute la surface de la particule, somme qui se forme comme aux n°s 88 à 90 (p. 165 à 169).

Les conditions définies s'obtiendront naturellement, pour une surface imperméable, en y annulant le flux F_n, et, pour une surface qui s'échauffe ou se refroidit par contact, en y égalant les deux densités, intérieure u et extérieure u_e, du calorique [1].

[1] On verra tout à l'heure (n° 159) que l'inégale condensation de la chaleur à

Digitized by Google

Mais le cas de l'échauffement ou du refroidissement par rayonnement exigera une hypothèse spéciale; car, dans les phénomènes de filtration, il n'y a pas, vu l'extrême petitesse des forces vives en jeu, de chute appréciable de pression ou de charge à l'entrée des tubes de transpiration. Et si le fluide y prenait des vitesses notables, outre la complication excessive que les inerties introduiraient alors dans l'expression générale des flux intérieurs ou, par suite, dans l'équation indéfinie, il n'y aurait plus, à la surface, parité, c'est-à-dire condition définie commune, pour le refroidissement et pour l'échauffement. En effet, les fluides ne récupèrent pas à leur sortie d'un tube, dans le réservoir qui les reçoit et où s'éteint en tourbillonnements leur vitesse acquise, la hauteur de charge qu'avait absorbée leur mise en mouvement à l'entrée du tube.

Il faudrait donc, pour pouvoir admettre la proportionnalité du flux F_n, traversant la surface, à une différence sensible, $u_e - u$, des deux densités extérieure et intérieure du calorique, attribuer, par exemple, à la couche superficielle des corps, une structure considérablement plus serrée, ou des tubes de filtration beaucoup plus étroits et résistants, qu'à leurs autres couches; hypothèse qui ne paraît guère vraisemblable, du moins pour bien des corps [1].

En résumé, l'assimilation de la chaleur à notre fluide expansif, filtrant dans un corps poreux, pourrait conduire au mode de propagation exposé dans ce Cours, avec cette simplification importante, que toute particule admettrait, au point de vue calorifique, trois plans rectangulaires de symétrie de contexture, ou un potentiel des flux, et que, par conséquent, l'ellipsoïde des conductibilités ne se distinguerait jamais de l'ellipsoïde principal.

Il ne serait pas même nécessaire de supposer la pression p du calorique et le coefficient ε de son frottement intérieur proportionnels à sa densité u. Ces deux hypothèses simples avaient ici pour but, comme on voit, d'arriver à des coefficients de conduc-

---

l'intérieur des divers corps conduit à distinguer, dans une étude plus complète, les températures u et u_e des densités correspondantes du calorique.

[1] Il se pourrait toutefois que cette difficulté fût atténuée, peut-être même levée, par le fait de l'énorme condensation du calorique dans les corps, dont il va être question au n° 159, fait qui nous obligera d'ailleurs à regarder comme choses distinctes la densité du calorique et la température.

Digitized by Google

tibilité intérieure constants, c'est-à-dire indépendants de u, qui désigne, jusqu'ici, dans l'explication fictive actuelle, la température absolue et non pas seulement, comme dans le reste du Cours, ses variations de grandeur modérée à partir d'un zéro arbitraire. Si l'on se contentait de faire les coefficients de conductibilité *à peu près* constants, ou, pour mieux dire, constants seulement lors des petits changements relatifs de température, ε et p pourraient évidemment devenir des fonctions positives quelconques de u, à condition que p grandît avec u; alors le coefficient h qui, au fond, exprime ici la fonction $\frac{u}{\varepsilon}\frac{dp}{du}$, désignerait une valeur ou particulière ou moyenne de cette fonction, dans l'intervalle médiocre où varierait la température. Or les phénomènes observés de propagation de la chaleur ne demandent rien de plus, au moins dans l'état actuel de nos connaissances.

Mais, outre la difficulté relative, comme on vient de voir, à la condition définie concernant les surfaces rayonnantes, il subsisterait dans cette théorie, ainsi que, du reste, dans toute autre où l'on ferait aussi la chaleur matérielle et non dynamique, une grave objection, suffisante à elle seule pour la rendre suspecte. Les corps les plus denses, les métaux, auxquels il est naturel d'attribuer le moins de pores sensibles et, par suite, les tubes de filtration les plus résistants à l'écoulement ou du débit total le plus réduit, devraient donner lieu aux flux les plus faibles. Ils seraient donc les plus mauvais conducteurs. Or ils sont, en réalité, les meilleurs, comme il le faut bien si la chaleur est du mouvement, se communiquant d'autant plus vite qu'il est transmis par un milieu plus compact.

159. **Complications qu'y entraînerait le fait de l'énorme condensation de la chaleur dans les corps.** — Mais ce n'est pas tout; car nous n'avons considéré encore que la conductibilité des corps, c'est-à-dire les mouvements de la chaleur à leur intérieur. Or il y aurait bien d'autres phénomènes inévitables à expliquer, surtout la condensation presque infinie de la chaleur dans les corps, comparativement à la chaleur du vide (dite *rayonnante*). Ce fait nous obligerait d'attribuer à la matière pondérable la propriété d'attirer fortement le calorique aux petites distances. Il en résulterait, à

Digitized by Google

l'état d'équilibre, ou une fois la condensation opérée, une véritable traction exercée par chaque corps sur la couche superficielle de son calorique, couche enveloppant, tout autour du corps, le calorique intérieur, ainsi porté à une densité très supérieure à celle du calorique resté au dehors; et cette traction neutraliserait la pression, devenue beaucoup plus grande, de ce calorique condensé, sur sa couche superficielle, à une fraction extrêmement petite près, équilibrée par la pression contraire du calorique extérieur.

Dès lors, la température d'un corps ne serait plus la densité vraie de son calorique (à un facteur constant près, le même pour tous les corps et dont nous faisons abstraction). Elle serait seulement la fraction de cette densité vraie, fraction toujours minime, et d'ailleurs variable d'un corps à l'autre, qui exprimerait la densité du calorique extérieur (ou libre) juste capable d'équilibrer, par sa pression, la pression du calorique intérieur, avec le concours de la traction due au corps lui-même. Notre théorie se compliquerait donc et ne ressemblerait plus aussi complètement à celle de la filtration. Mais, en revanche, elle nous expliquerait la *dilatation par la chaleur;* car la traction du corps, sur la couche superficielle et enveloppante de son calorique, provoquerait chez celle-ci une traction contraire sur le corps, dont les molécules s'écarteraient jusqu'à ce qu'elle fût équilibrée par leurs attractions réciproques croissantes, constituant la cohésion même du corps.

La quantité de chaleur occupant les interstices moléculaires d'un corps, produit de leur capacité totale par la densité qu'y aurait le calorique, égalerait donc le produit de cette capacité par le rapport très grand de la densité vraie du calorique, dans le corps, à la densité du calorique libre qui lui ferait équilibre du dehors, et par la température. D'où il suit que le calorique spécifique C par unité de volume serait, non plus simplement le rapport des espaces interstitiels au volume apparent total, mais son produit par le très grand rapport, variable avec le corps considéré, des deux densités du calorique dans le corps et dans le vide, à même température. Or il pourrait résulter de là une certaine atténuation de la difficulté relative à la forte conductibilité des corps lourds, c'est-à-dire des métaux; car, pour une température donnée et

Digitized by Google

ayant des *pentes* données, le courant de chaleur, tout en y étant toujours, vraisemblablement, fort réduit en section totale et fort ralenti, par l'étroitesse extrême des tubes de transpiration, y aurait une densité plus forte que dans les corps moins compacts, si la condensation du calorique s'y trouvait accrue, à raison de tractions plus énergiques exercées naturellement, à la surface du corps, sur la couche superficielle de son calorique, par une matière pondérable plus dense.

Les actions complexes ainsi exercées à la surface libre des corps, les rapides variations qu'y offriraient, dans le sens normal, la densité du calorique et sa pression propre, fourniraient peut-être aussi le moyen d'y expliquer l'existence d'une chute finie de température à travers les imperceptibles couches superficielles, et, par suite, la proportionnalité du flux entrant à cette chute totale.

160. **Analogie des mêmes phénomènes de filtration d'un fluide expansif avec ceux de diffusion des solutions étendues.** — Quoi qu'il en soit, on sait maintenant qu'il ne faut pas regarder le calorique comme une substance, ni, par suite, le compter au nombre des fluides expansifs dont il s'agit ici, ou qui, à température constante, ont tout à la fois leur pression et leur coefficient de frottement intérieur proportionnels à leur densité. Néanmoins, ces fluides expansifs ne sont pas une pure fiction. Autant que nous pouvons en juger, un corps à l'état de solution diluée, dans un liquide par exemple, semble être justement constitué comme eux.

Depuis que la découverte de parois *semi-perméables*, laissant passer le dissolvant, mais retenant les corps dissous, a permis de mesurer la pression propre de ceux-ci (dite *pression osmotique*), on sait qu'ils obéissent, comme les gaz, à la loi de Mariotte. Or, il suffit, dès lors, d'y admettre la proportionnalité du coefficient de frottement à la densité, pour que les lois expérimentales de leur diffusion dans les dissolvants se confondent avec celles d'une filtration où le dissolvant serait le milieu poreux. Et une telle réduction de la diffusion à la filtration, qui unifie notre science en ramenant aux lois de la Mécanique ordinaire un phénomène aussi mystérieux que la diffusion des corps dans leurs dissolvants, con-

Digitized by Google

stitue évidemment un argument sérieux en faveur de l'hypothèse qui lui sert de base [1].

Si l'équation indéfinie de ce phénomène est celle de Fourier, les relations définies, propres à la surface limite du dissolvant, n'y sont pas moins analogues à celles de la théorie de la chaleur, du moins dans les circonstances les plus simples. Pour les parties de cette surface imperméables à la substance dissoute (parois ou surface libre), le flux F_n de diffusion est nul; et, pour celles qui sont constituées par des fragments du corps en train de se dissoudre, le flux F_n qu'ils fournissent par unité d'aire peut être censé proportionnel à l'excédent $u_M - u$ de la densité donnée u_M de *saturation* sur la densité effective u. On y a donc la même condition générale

$$F_n = k(u_M - u),$$

que dans le cas d'un échauffement par rayonnement, sauf la substitution de la limite supérieure constante u_M à une température extérieure u_e susceptible de prendre toutes les valeurs. Et si, le coefficient k se trouvant assez grand, la densité de saturation est atteinte presque instantanément par la couche dissoute qui touche le corps, on tombe sur le problème plus simple de l'échauffement par contact, avec la condition définie $u = u_M$ à la surface considérée.

---

[1] On peut voir sur cette théorie de la diffusion, dans le Volume intitulé *Application des potentiels, etc.* (p. 404 à 406), les Notes de 1883 ou de 1884 citées ci-dessus. L'assimilation des phénomènes de diffusion à ceux de filtration y est opérée en admettant, à titre d'hypothèses pures, que les solutions étendues ont, non seulement leur coefficient de frottement intérieur, mais aussi leur pression propre, en raison directe de leur densité; car, à cette date de 1884, les physiciens chimistes n'avaient pas eu encore, du moins à ma connaissance, l'idée que les solutions pussent accepter la loi de Mariotte et être, sous ce rapport, des sortes de gaz.

FIN DU TOME I.

Digitized by Google

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
29154 Quai des Grands-Augustins, 55.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06793 8152

PHYSICS LIB.
QC
254
.B777
STORAGE

Boussinesq
Théorie analytique
de la chaleur

V. 1 406158

5/10/26

Re-class

FEB

Spi

MAY 24
1957

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06793 8152

PHYSICS LIB.
QC
254
.B777
STORAGE

Boussinesq
Théorie analytique
de la chaleur

V. 1.

406158
5/10/26
Re-class
FEB
MAY 1 1957 24

Digitized by Google

Digitized by Google